Carlo Cellucci Roberto Cordeschi Tullio De Mauro
Paolo Freguglia Gabriele Giannantoni Roberto Levi
Lucio Lombardo Radice Barbara Veit Riccioli

Introduzione alla logica

a cura del Cidi
(*Centro di iniziativa democratica degli insegnanti*)

Editori Riuniti

I edizione: gennaio 1976

Viale Regina Margherita, 290 - 00198 Roma
Copertina di Tito Scalbi
CL 63-0901-1

Indice

Nota

Questo volume raccoglie una serie di lezioni (per lo piú ampiamente rielaborate) tenute presso la sede del CIDI di Roma nel 1973-74. Esso vuole presentarsi pertanto non come l'ennesimo manuale introduttivo di logica, ma come la documentazione di un'esperienza didattica che, attraverso il « gusto » per lo studio della logica, dia almeno un'idea di quanto ampia sia l'incidenza della logica moderna sulla cultura contemporanea. Di qui da una parte l'impostazione « didattica » e volutamente elementare soprattutto dei primi capitoli, dall'altra la non uniformità dei punti di vista che il libro presenta nel suo complesso: caratteristica questa che, senza compromettere l'omogeneità del lavoro, ci sembra gli assicuri una sua particolare originalità.

Lucio Lombardo Radice

Introduzione: logica e interdisciplinarità

1. *Interdisciplinarità e unità della cultura*

Parcellizzazione educativa.

Il punto di partenza è il problema dell'unità della cultura. Il ricercatore, l'operatore culturale, l'insegnante tendono molto spesso a rinchiudersi nel loro ambito: diventano dapprima *specialisti* in una sola cosa, uomini di un solo scaffale; poi *microspecialisti* di una parte sempre piú piccola di quella cosa, uomini di un solo ripiano o di un solo libro di quello scaffale. L'intellettuale tende oggi, comunque, a restare prigioniero di una o due *materie*; e questo non per sua volontà e sua responsabilità, ma perché gli è difficile sottrarsi alla partizione della cultura in materie, oggi dominante. Questa situazione provoca in tutti noi uno stato di disagio, di inquietudine, di incertezza.

Per quel che riguarda noi insegnanti, non si tratta soltanto di un problema didattico; a monte c'è, appunto, il problema della unità della cultura. Il problema didattico, che è oggi abitudine, e anche moda, chiamare problema della *interdisciplinarità,* è il riflesso di un problema piú vasto, quello della unità della cultura. Infatti, come è ovvio!, non si può creare artificiosamente nell'insegnamento una unità culturale-didattica, se essa non corrisponde ad una qualche *tendenza alla unità* della ricerca, della cultura nel suo insieme.

Il problema, a mio avviso, è molto difficile. È un problema che oggi tanti, e in tanti modi, *cercano di risolvere*: ma non è un problema *risolto,* tutt'altro.

Infatti, la tendenza alla specializzazione, a una specializzazione che non è un « di piú » nel quadro di una cultura unitaria, l'aggiunta di una « cultura speciale » a una comune « cultura generale », ma che è invece vera e propria lacerazione e frammentazione della cultura, è una tendenza che ha radici nel modo di produzione capitalistico; anzi, piú in profondo, nella stessa divisione del lavoro cosí come si attua in una « società industriale ».

In particolare, questa tendenza è operante nelle nostre scuole, in tutte le nostre scuole, con un massimo di esasperazione negli istituti di istruzione secondaria superiore. Infatti, *tutte* le nostre scuole — tranne forse i due cicli elementari, che ancora, almeno in parte, « si salvano » da questo punto di vista — sono fondate istituzionalmente sulla partizione in materie. *La « materia » è il fondamento istituzionale della « cultura scolastica ».*

Team Teaching?

2. *Come superare la frammentazione della cultura in « materie »?*

Nello sforzo, che molti oggi fanno, e generosamente, di superare le barriere che dividono « materia » da « materia », c'è un rischio, opposto a quello della specializzazione: il rischio della genericità, della superficialità, della episodicità.

Superare la frammentazione dell'insegnamento in materie non significa, o almeno non significa *soltanto,* introdurre in tutte le materie qualche nome che simboleggia l'unità della cultura, un Leonardo o un Galileo. Non è sufficiente cogliere soltanto alcuni *momenti di pienezza unitaria della cultura,* quelli che chiamerei i periodi della cultura « allo stato nascente ». Fissare l'attenzione sulla Grecia, sul Rinascimento, sull'Illuminismo, significa privilegiare i momenti nei quali tutta la cultura viene fondata o rifondata unitariamente. La interdisciplinarità si personifica allora in Aristotele, in Leonardo e in Galileo, in Diderot o d'Alembert. In questo modo, però, andiamo a ricercare nel passato — nella nascita della cultura in Grecia, nel sorgere del metodo sperimentale e della scienza moderna nell'Europa del Rinascimento, nella rivoluzione culturale che precede la rivoluzione francese — il paradiso perduto della unità della cultura.

Non dico che questo non sia importante: tutt'altro. Per quel che mi riguarda, trovo questo approccio alla unità della cultura tanto importante, da essermi fatto promotore della edizione in volume di una esperienza fatta a Bologna da un « collettivo interdisciplinare » di insegnanti e allievi di un liceo scientifico; di uno studio della nascita della scienza moderna, incentrato su Galileo, e conclusosi con un vero e proprio « convegno », relatori gli studenti. Giudico, quindi, positivo e valido lo studio dei momenti alti della unità della cultura nel passato: non credo però che *questo* sia l'asse portante di un insegnamento interdisciplinare moderno, contemporaneo.

Ma che cosa, allora, contropropongo?

3. *Dalle materie ai metodi*

La proposta che faccio (senza pretese di originalità) consiste in ciò: spostare il baricentro, o diciamo il fuoco, il centro di interesse del lavoro culturale a scuola, dalle materie ai metodi, ai punti di vista.

Nel seguito, mi riferirò a un particolare punto di vista: quello della formalizzazione, e piú in particolare della matematizzazione. Voglio dire però prima, e sia pure per brevissimi accenni, qualcosa su altri punti di vista, a mio avviso fondamentali in *ogni* ricerca.

In *ogni* insegnamento — quale che ne sia l'oggetto, il contenuto specifico — ci dovrà essere un *approccio storico-genetico.*

Il *metodo storico* non dovrà essere caratteristica *solo* di un insegnamento storico specializzato: dovrà invece essere uno dei metodi *universali,* che si applicano in qualsiasi ricerca.

Occorrerà usare il metodo storico, o « genetico », se si considera questa seconda definizione piú generale, anche quando si studia la storia naturale, l'evoluzione dell'Universo, della Terra, della vita, lo sviluppo della tecnica, dei rapporti di produzione, del pensiero scientifico, e cosí via.

Il *metodo sperimentale* non dovrà essere una prerogativa della materia « scienze naturali », della materia « fisica », della materia « chimica »: dovrà essere un metodo impiegato da tutti i ricercatori, un metodo che investe tutti i contenuti, da usarsi tanto nel laboratorio di fisica, quanto nel « laboratorio » di matematica, nello studio dell'ambiente nello spazio e nel tempo, nella storia e nella geografia. Non mancano esperienze assai belle, anche in Italia, di applicazione *globale* del metodo sperimentale. Vorrei ricordarne una, quella promossa da Liliana Ragusa Gilli in una scuola media di un quartiere del centro storico (il quartiere Pigna) a Roma. Il quartiere è stato studiato, nel suo spazio e nel suo tempo, colla ricerca di documenti, con la raccolta di dati economici e demografici, con analisi delle statistiche, e ricorrendo quindi a diagrammi, istogrammi, medie di vario tipo, calcolo del « baricentro della popolazione » e cosí via. C'è di mezzo tutto, c'è entrato tutto. Il metodo sperimentale, che non esaurisce nessuna materia, nessun ambito di ricerca, attraversa però tutte le « discipline », e le collega l'una all'altra.

Un altro metodo, o forse sarebbe meglio dire « atteggiamento mentale », che deve essere presente in ogni ricerca, è quello che io chiamerei il metodo della *progettazione*: l'abitudine a dedurre, ad estrapolare, ad anticipare a partire da ciò che è, ciò che noi vogliamo sia nel futuro. Si tratta della dimensione che possiamo chiamare « filosofica », « utopica », piú correttamente e concretamente: *politica,* e che è caratteristica dell'uomo. L'uomo vive con le radici nel passato e la fantasia nel futuro; la *prassi* dell'uomo implica sempre un *progetto.*

4. *La formalizzazione: un « segno dei nostri tempi »*

Il metodo generale, « universale » sul quale vorrei adesso fermare l'attenzione è quello della *formalizzazione.*

La formalizzazione è un tipo di approccio ai problemi, utile e valido per tutte le ricerche, per tutti i campi.

Quando parlo di metodi « generali », di punti di vista « universali », intendo dire che *ogni* ricerca richiede *ciascuno* di questi metodi; nessuno di essi esaurisce però l'infinita ricchezza del ricercare, dello scoprire, del progettare, dell'organizzare, e cosí via: ogni attività, ogni ricerca di conoscenza ha una sua « infinità », una ricchezza inesauribile. Non dico, quindi, che la sola formalizzazione consenta mai di esaurire e dominare un ambito di ricerca, quale che esso sia; si tratta però di un metodo che è importante per tutti saper utilizzare. Anzi, l'importanza crescente della formalizzazione è, secondo me, uno degli aspetti caratteristici della cultura moderna e contemporanea, un « segno dei nostri tempi ».

A questo proposito vorrei dire, soltanto per accenno, che non *è* certamente casuale (a mio avviso) che dalla musica *descrittiva* della seconda metà dell'800 e del primo '900, che pur è stata musica grandissima in alcuni autori e in alcune opere, si sia passati ad una musica sempre piú rarefatta di contenuti descrittivi: atonale, dodecafonica, poi ad un puro e semplice impasto di suoni, a una « tavolozza » di suoni sempre piú ricca e varia, che vengono scelti, fusi, *strutturati in modo essenzialmente formale,* secondo una logica interna di tipo formale.

Non è un caso che negli stessi decenni siano sorte, e si siano affermate, tendenze *non figurative* nella pittura e nella scultura. Senza dubbio, nel movimento non figurativo, non descrittivo, riescono a inserirsi, e ad avere talvolta un successo di « moda », avventurieri e venditori di fumo. Ma abbiamo opere come quelle di Picasso, di Klee, di Moore, che sono lí a testimoniare che la formalizzazione nelle arti risponde in modo profondo a esigenze serie del nostro tempo.

Ancora: non è certo un caso che non solo nella filosofia, ma anche nella antropologia culturale, nella linguistica, in altre « scienze umane » l'*analisi strutturale* abbia via via acquistato un peso che oggi è davvero rilevante. (Di questo si parlerà, credo, in un parallelo volume di *Introduzione alla linguistica,* curato da Tullio de Mauro, e fondato anche esso su di un corso promosso a Roma dal CIDI, nel 1973-74.)

Non è un caso, infine, che la nostra epoca sia — nello stesso tempo — l'èra della *cibernetica,* cioè della formalizzazione dei funzionamenti e dei controlli automatici. È la scienza che parla di « meccanismi » e di « automi » in modo formale, e che è perciò applicabile (entro i limiti che le sono propri) tanto al cervello umano, a un apparato organico animale o vegetale, quanto a una macchina (inanimata) nel senso corrente del termine.

Siamo, dunque, in un'epoca nella quale uno dei *segni dei tempi* è la tendenza alla unificazione di « concreti », diversi tra di loro, in un solo schema — la tendenza alla formalizzazione, al ritmo, al « modo di... », alla struttura. Le parole che si impiegano possono naturalmente cambiare: io parlerò, in generale, di *formalizzazione,* in particolare, di *matematizzazione.*

La matematizzazione è infatti, a mio avviso, soltanto un aspetto tecnico (per quanto importantissimo) della formalizzazione. I processi di formalizzazione, cioè l'importanza crescente che noi attribuiamo allo schema, alla forma, alla struttura, al simbolo — tutto questo ha la matematizzazione come uno dei suoi aspetti. La matematizzazione, lo ripeto, è l'aspetto piú tecnico e rigoroso della formalizzazione, che tuttavia non identificherei colla matematizzazione; la formalizzazione mi sembra un fenomeno piú generale e complesso, non sempre « matematizzabile ».

5. *Dalla matematizzazione della fisica a quella delle scienze umane*

Una delle chiavi interpretazione

La matematizzazione, strumento classico delle scienze fisiche dapprima, di quelle naturali poi, è nella nostra epoca ogni giorno di piú mezzo ausiliario importante anche nelle « scienze umane ». Questo è un altro segno dei nostri tempi. La matematica, legata alla astronomia sin dalla piú remota antichità, è divenuta, ai tempi di Galilei e di Newton, lo strumento principe per la comprensione e il dominio dei fenomeni meccanici. Il grande libro di Isacco Newton, uno dei testi che fondano la scienza moderna, ha per titolo: *Philosophiae naturalis principia mathematica*: i princípi matematici della filosofia naturale. L'« abbinamento » tra fisica e matematica è davvero molto antico, e può essere ricercato addirittura in Archimede, non che in Galileo o in Newton. Piú tardi, nel corso dell'Ottocento, *tutte* le scienze naturali — dapprima la chimica, poi, in epoca piú moderna, la biologia — si avvalgono dello strumento matematico. In particolare, viene largamente usato, con successo, il calcolo delle probabilità (soprattutto nella genetica).

Negli ultimi decenni il metodo matematico viene usato però non solo da *tutte* le scienze naturali, e da *tutte* le tecniche, ma anche dalle scienze umane.

Non si concepisce piú la eventualità che uno storico serio non si avvalga, sia pure come lavoro preliminare per la sua sintesi, di analisi di vario tipo nelle quali entra il metodo matematico; non si avvalga cioè di statistiche, di diagrammi, di dipendenze funzionali, di interpretazioni ed elaborazioni matematiche di dati.

Si è sviluppata e perfezionata la matematizzazione di molti fenomeni economico-sociali. C'è una approfondita matematizzazione dell'economia politica nel suo complesso (teorie matematiche della programmazione della produzione), oppure di alcuni problemi economici particolari (« programmazione lineare », metodi di ottimizzazione, ecc.). La *teoria dei giochi* tende a diventare una teoria matematica generale del comportamento nazionale, della strategia ottimale (rispetto a un certo obiettivo). La *teoria dell'informazione* si sviluppa impetuosamente, investendo la cibernetica, la tecnica delle comunicazioni, l'analisi del linguaggio. Esiste anche una matematizzazione della linguistica, forse ancora ai suoi primi passi, che tende tuttavia a costituirsi in una disciplina autonoma, la *linguistica matematica*.

Quello della matematizzazione è perciò un metodo che appare coessenziale a tutte le ricerche.

Occorre, certo, mettere in guardia contro ogni « trionfalismo matematico ». Il matematico non è davvero un mago: la matematizzazione non è davvero la chiave che apre tutte le porte, la tecnica che risolve tutti i problemi. Ci sono troppi problemi in cielo e in terra che non conosce la nostra matematica, potremmo dire, parafrasando Amleto. Tuttavia, dobbiamo anche dire che tutti dovrebbero avere una idea del metodo matematico, perché per tutti è uno strumento importante.

6. *Perché abbiamo scelto la logica matematica*

Con i dirigenti del CIDI, ci siamo allora chiesti (il plurale si riferisce al « gruppo di lavoro » che firma questo volume): « qual è il modo migliore per diffondere una conoscenza, almeno qualitativa, del metodo matematico, della matematizzazione, una conoscenza non specialistica, accessibile non diciamo a tutti, ma quanto meno ai colleghi insegnanti, quale che sia la loro formazione? »

I possibili modi buoni sono sempre molti, e non è detto che ci sia un « modo ottimo » in assoluto. Noi abbiamo ritenuto che una via buona, quella anzi che a noi sembrava oggi la migliore, fosse quella della *logica matematica*, concepita anzitutto e soprattutto come un esempio di formalizzazione, come un'esperienza di matematizzazione.

7. *Da Leibniz a Boole*

La logica simbolica è un bell'esempio di formalizzazione, dal punto di vista della « estetica matematica ». Nello stesso tempo, per i suoi contenuti e per le sue possibili applicazioni, la logica matematica interessa da vicino diversi campi della ricerca, del pensiero, della tecnica. La logica matematica ci è sembrata, quindi, la scelta migliore, rispetto all'obiettivo che ci siamo proposti, e che abbiamo prima dichiarato.

Farò, in questa introduzione, solo qualche accenno storico. Il nostro « collettivo di lavoro » ritiene che la ricostruzione storica debba essere fatta alla fine, altrimenti non si sa di *che cosa* si faccia la storia. Come nel nostro corso del CIDI 1973-74 le conferenze storiche di Paolo Freguglia hanno chiuso il ciclo, cosí in questo volume quelle conferenze saranno trasformate in un capitolo che segue la parte « tecnica » introduttiva.

Il punto di partenza della logica simbolica va ricercato agli inizi della scienza moderna, in una idea geniale di Guglielmo Goffredo Leibniz, il primo che abbia proposto la matematizzazione della logica, come una tecnica che deriva da un'esigenza filosofica generale. Dice Leibniz: « Le lingue parlate, benché siano generalmente utili per il pensiero discorsivo, sono tuttavia soggette ad innumerevoli ambiguità di significato e non possono offrire i vantaggi del calcolo, consistenti specialmente nella possibilità di scoprire gli errori di deduzione derivati dalla costituzione della struttura delle parole, come errori sintattici e barbarismi. Questo meraviglioso vantaggio è offerto finora soltanto dai simboli degli aritmetici e degli algebristi, nel caso dei quali la deduzione è costituita semplicemente dall'uso dei simboli, ed un errore di calcolo si identifica con uno di pensiero ».

Il proposito di Leibniz è quello di arrivare, anche nel pensiero e nel dibattito filosofico, ad una situazione altrettanto chiara. Matematizzando il pensiero, quando due filosofi non sono d'accordo, potranno mettersi al tavolino e dire: *calculemus!* mettiamoci a fare i calcoli, sottoponiamo a una verifica esatta, di tipo matematico, il nostro problema filosofico.

Gli scritti di Leibniz su questo suo programma di matematizzazione della filosofia, sullo strumento che egli voleva costruire, e che chiamava *characteristica universalis*, e, piú ragione calcolante

espressivamente, *calculus ratiocinator*, vanno naturalmente collocati in un dato momento storico. Leibniz era pieno di entusiasmo per le scoperte del suo tempo, alle quali diede un contributo grandissimo. Erano i decenni nei quali si affermava la algebrizzazione della geometria (geometria analitica, delineata in modo sistematico da Descartes nel 1636); il discorso geometrico, intuitivo e non sempre univoco, veniva affidato a una tecnica automatica, ogni problema controverso poteva essere risolto dicendo: *calculemus!* L'idea di una automatizzazione della deduzione è quindi una delle grandi idee del secolo; Leibniz prospetta e propone una pan-formalizzazione che consente di ridurre alla certezza e all'automatismo dell'aritmetica e dell'algebra *ogni* forma di ragionamento e di deduzione [1].

La logica matematica nascerà, e si svilupperà, riprendendo l'impostazione di Leibniz, ma senza la pretesa di essere quel *calculus ratiocinator* universale che Leibniz vagheggiava.

Questo è un punto importante, anzi decisivo; conviene fare chiarezza subito. Le « macchine pensanti » non solo sono ben lontane dal poter sostituire oggi le menti individuali e i « cervelli collettivi » caratteristici della organizzazione in società degli uomini; è da ritenere che non potranno mai farlo, per ragioni di principio (tanto per dare un esempio: è assai arduo credere alla possibilità di automi creatori di alta poesia, di nuovi stili pittorici che interpretano il « profondo » del nostro io, e cosí via). Ciò non significa, però, che alcune attività che fino ad oggi venivano considerate prerogativa della mente umana, possano essere (e siano state) affidate con vantaggio ad automi. Un automa può controllare la correttezza di *certe* deduzioni e conclusioni meglio di un uomo. Nella prima parte del nostro breve corso, nelle « lezioni » nelle quali Barbara Veit Riccioli spiega il « calcolo delle proposizioni », si vedrà come sia « automatizzabile » il giudizio di

[1] Tra le tante opere su Leibniz filosofo-matematico, suggeriamo un'opera giovanile di B. Russell, *La filosofia di Leibniz*, trad. it. Roma, 1972, a cura di Roberto Cordeschi, uno dei coautori di questo nostro libro collettivo.

verità o di falsità di un enunciato, composto mediante la « connessione » di altri enunciati elementari, quando si conosca il « valore di verità » degli enunciati elementari componenti.

Insomma, quando si matematizza la logica non si fa *tutto*, ma non si può neppur dire che non si faccia *niente*: si fa *qualcosa*. Si fa qualcosa che (nel caso ad esempio del « calcolo delle proposizioni ») può non essere molto importante in sé, che però è importante qualitativamente, come metodo, come comprensione del processo di astrazione.

Sul procedimento di astrazione, ha scritto pagine mirabili il fondatore di quel « calcolo logico » del quale Leibniz era stato il profeta. Parliamo dell'inglese George Boole che nella sua prima opera, *L'analisi matematica della logica* (1847), scrive: « Coloro che hanno dimestichezza con lo stato attuale della teoria dell'algebra simbolica, sanno bene che la validità di procedimenti dell'analisi non dipende dall'interpretazione dei simboli che vengono usati, ma esclusivamente dalle leggi della loro combinazione... L'espressione di grandezze o di operazioni che si riferiscono a grandezze è stato l'oggetto dichiarato per il quale sono stati inventati i simboli della analisi ed indagate le loro leggi. Cosí le astrazioni della moderna analisi hanno incoraggiato la persuasione che la matematica sia, in linea di principio non meno che in linea di fatto, la scienza delle grandezze, cioè che i calcoli si facciano come calcoli su numeri, o al piú su grandezze geometriche ».

« Noi possiamo dare, viceversa, come caratteristica definiente del calcolo, che esso è un metodo basato sull'uso di simboli, le cui leggi di combinazione sono note e generali, ed i cui risultati permettono un'interpretazione priva di contraddizioni. È sul fondamento di questo principio generale che mi propongo di costruire il calcolo della logica e che pretendo per esso un posto tra le forme riconosciute in analisi matematica. »

Boole perviene cosí ad una concezione del calcolo puramente formale. Un « calcolo » non presuppone un particolare significato degli oggetti sui quali esso opera, non deve agire necessariamente su « quantità », su numeri o grandezze geometriche. Inoltre, un « calcolo » è fondato sulle regole verificate dalle sue operazioni, non su di un significato determinato di esse operazioni.

George Boole fonda la moderna logica simbolica, o « matematica », attorno alla metà dello scorso secolo. Tra la fine dello scorso secolo, e l'inizio del nostro, abbiamo la prima grande «stagione» della logica matematica, legata ai nomi del tedesco Gottlob Frege, dell'italiano Giuseppe Peano, dell'inglese Bertrand Russell.

8. *Benedetto Croce giudicava « risibile » la « logistica »*

Qui però debbo fermarmi, perché, come ho già detto, l'illustrazione dello sviluppo storico della logica matematica deve *seguire,* e non precedere, la conoscenza di essa, e sia pure dei suoi primi elementi. Vorrei, invece, fermare l'attenzione sulla violenta e sprezzante opposizione della scuola neo-hegeliana, dominante in Italia all'inizio del nostro secolo (anzi, si può ben dire, fino alla Liberazione), alla logica matematica, che Benedetto Croce chiamava « logistica », forse per non onorarla con il nome di « logica », che egli riservava alla speculazione filosofica sui « concetti ».

Nella sua *Logica come scienza del concetto puro,* nel 1909, Croce scrive: « Come *scienza del pensiero* la Logistica è cosa risibile, degna veramente dei cervelli che l'hanno costruita e che sono i medesimi i quali vanno vagheggiando una nuova Filosofia del linguaggio, anzi una nuova Estetica, nelle loro insulse teorie della *Lingua universale* » (la punta della polemica è contro il contemporaneo Giuseppe Peano, che aveva proposto un *latino sine flexione* come nuova lingua internazionale di scambio tra gli studiosi, in particolare tra i matematici). « Come formulario di utilità pratica non è nostro compito qui esaminarla, tanto piú che già ci è occorso dire a questo proposito il nostro avviso. » « Al tempo del Leibniz; cinquant'anni dopo, ai tempi ultimi del wolfianesimo; un secolo fa, ai tempi dell'Hamilton; quarant'anni addietro, ai tempi del Jevons e di altri; e finalmente ora, che è il bel tempo dei Peano, dei Boole, dei Couturat, questi nuovi congegni sono stati offerti sul mercato: e tutti, sempre, li hanno stimati troppo costosi e complicati, cosicché non sono entrati ancora nell'uso. »

« Vi entreranno nell'avvenire? La pratica opera di persuasione, propria del commesso viaggiatore, che cerca acquirenti per un nuovo prodotto, e la previsione dell'industriale e del commerciante circa la fortuna che quel prodotto possa mai incontrare, non sono di pertinenza della filosofia, la quale, disinteressatamente, potrebbe qui tutt'al piú rispondere, con parole di benevola attesa: se son rose, fioriranno. »

Erano rose, e sono fiorite. Quella di Croce è stata una scommessa perduta, una previsione fallita. Ma non si tratta solo di un errore di previsione. C'è sotto, mi pare doveroso dirlo, un vizio di fondo: il settarismo, la condanna e l'irrisione per tutto ciò che non rientra nella « nostra filosofia ». (Tra parentesi: si parla spesso di « zhdanovismo » quando si vuol bollare una corrente di pensiero di dogmatismo chiuso, di limitatezza culturale; non vedo perché, con altrettanta ragione, non si dovrebbe parlare di « crocianesimo », almeno per quel che riguarda la chiusura nei confronti del pensiero scientifico, e la lotta astiosa contro il suo sviluppo.)

Dispiace farlo, perché Benedetto Croce è personalità di alta statura, molto complessa e contraddittoria, ma nel caso della sua *Logica* non si possono non impiegare parole dure. Croce rivela una impressionante ristrettezza mentale, ogni qual volta si parla di scienze naturali od esatte; la raffinatezza che lo caratterizza quando discorre di arte o di storia, diventa vera e propria rozzezza culturale. « Cosa risibile », « teorie insulse », « congegni... offerti sul mercato » che nessuno compra, « commessi viaggiatori » che cercano di piazzare il prodotto. Questo tipo di linguaggio, e di giudizio, sugli inizi di un movimento destinato a grandi e multiformi sviluppi; questa totale incapacità del Croce (e del resto anche del Gentile) di intuire le enormi potenzialità di pensiero, e sia pure di pensiero « unilaterale » (ma quando mai il pensiero umano è « totale »?), che risiedeva nella « logistica » di Boole e di Peano, lascia oggi esterrefatti e scandalizzati.

Non si trattò soltanto di zhdanovismo intellettuale; si trattò anche di zhdanovismo pratico, *avant lettre*. Infatti, la scuola di logica matematica che Peano stava fondando in Italia è stata non solo combattuta filosoficamente, ma privata degli strumenti e delle istituzioni necessarie alla sua crescita (cattedre, istituti, centri di studio, rappresentanze in accademie e cosí via) dal potere esercitato dal neo-hegelismo, da Croce e da Gentile, tanto quando erano uniti quanto quando erano divisi. La repressione culturale si può fare anche sotto bandiera « liberale », mettendo al bando dalle istituzioni le correnti avverse o diverse.

Erano rose, e sono fiorite. Ma sono fiorite altrove; in Inghilterra, negli Stati Uniti, in Polonia. Eppure, si può ben dire che la logica matematica moderna l'ha fondata Giuseppe Peano, che Croce derideva senza scorgere quale genio c'era sotto quella follia; quel Peano che è stato determinante nella formazione di Bertrand Russel, e che per primo ha bene organizzato simbolicamente e matematicamente la logica, che per primo ha proceduto in modo rigoroso nel compito (tuttora aperto) della fondazione della matematica. Mentre in tanti altri paesi, dagli Stati Uniti all'URSS, dall'Inghilterra alla Ungheria, alla Polonia, esistono da decenni cattedre, istituti, centri di « logistica », e da decenni si pone il problema della introduzione dei primi elementi di logica matematica nella cultura di base di tutti, partendo dalle elementari, nella patria di Giuseppe Peano solo ora, negli anni settanta, abbiamo *qualche* cattedra di logica matematica ricoperta da professori di ruolo (primo concorso nel 1975). Tra la fine degli anni cinquanta e l'inizio dei sessanta, per mandare in cattedra, come professore di ruolo, qualche ottimo logico matematico, abbiamo dovuto farlo passare per la via traversa dei concorsi di filosofia della scienza, o di algebra (dico « abbiamo », perché ho avuto il piacere di essere membro della commissione di algebra che ha proclamato primo vincitore del concorso il logico Roberto Magari, che è oggi un caposcuola di rilievo, non solo italiano, nella logica matematica).

9. *Importanza della logica simbolica*

La logica matematica, da Boole ai nostri giorni, ha avuto grande importanza almeno per quattro indirizzi della cultura: 1) per la matematica; 2) per la filosofia; 3) per la linguistica; 4) per l'informatica e la teoria degli automi.

Mettiamo di proposito al primo posto l'influenza che la matematizzazione della logica ha esercitato sulla matematica stessa. Tra logica e matematica si è stabilito un rapporto dialettico. La matematizzazione della logica ha prodotto nuovi oggetti di indagine matematica, e questo sin dall'inizio. Oggi si chiamano *algebre di Boole* certe « strutture algebriche » nelle quali sono definite (astrattamente) delle operazioni, verificanti determinate proprietà formali. Si chiamano *algebre di Boole* perché uno dei « modelli » nei quali possono essere concretizzate sono, ad esempio, le proposizioni (enunciati), con quelle operazioni tra proposizioni che sono la congiunzione e la disgiunzione di due enunciati, il passaggio da un enunciato alla sua negazione. Ma si tratta di *una* classe di « modelli » di algebre di Boole; il concetto matematico di « algebra di Boole » è piú generale del concetto logico-matematico di « calcolo delle proposizioni » secondo Boole; vi è un vero e proprio processo dialettico di elevazione « a spirale », dalla matematica alla logica di nuovo alla matematica a un livello piú elevato.

Lo stesso si può dire (tanto per fare un secondo esempio tra i molti possibili) per le logiche trivalenti o polivalenti: a tre valori (vero, falso, indecidibile) o a piú valori (per esempio, vero con una certa probabilità, che va da « zero » = impossibile, a « uno » = certo).

Per il matematico, non ha molta importanza stabilire con quale logica ragionare; di fatto, il matematico ragiona finora colla tradizionale logica a due valori. Tuttavia, le « altre logiche », a piú di due valori, hanno importanza anche per il matematico che non crede ad esse filosoficamente e che si guarda bene dall'usarle nel suo lavoro quotidiano, come logiche; hanno *importanza matematica,* perché offrono « modelli » di strutture matematiche interessanti, alle quali si possono dare anche interpretazioni diverse da quella logica. Insomma, ancora una volta il processo di matematizzazione di una logica si riflette in uno sviluppo della astrazione matematica.

In secondo luogo: taluni problemi che centocinquanta o duecento anni fa erano affrontati e investigati dal filosofo « puro », oggi sono divenuti oggetto della logica matematica. Vorrei dare solo due esempi, relativi alle questioni di indipendenza degli assiomi di un sistema. Duecento anni fa, o poco meno, Emanuele Kant, nella sua *Critica della ragion pura,* e precisamente nella sezione dedicata alla « Estetica trascendentale », asseriva la necessità, e quindi unicità, della geometria euclidea, come forma a priori nella quale la sensibilità umana « organizza » il molteplice spaziale.

Alla domanda: « la geometria euclidea è l'unica pensabile e possibile? », viene data oggi una sicura risposta (negativa) dal matematico-logico. Il problema può essere *risolto,* perché può essere matematizzato. Innanzitutto: cosa significa « pensabile », « possibile », quando ci si riferisce a una geometria non-euclidea, a una geometria nella quale valgono tutti gli assiomi della geometria metrica euclidea (« geometria ordinaria ») salvo l'assioma che asserisce l'unicità della parallela da un punto dato ad una retta data nel piano determinato da quel punto e da quella retta? La *esistenza* o *non-esistenza* di una geometria non-euclidea viene ridotta dal matematico alla *non contraddittorietà,* alla « coerenza » dei suoi assiomi-base, secondo la proposta di David Hilbert, oggi pienamente verificata dal teorema, logico-matematico, secondo il quale ogni teoria coerente « del 1° ordine » possiede « modelli » (il non contraddittorio « esiste » sempre).

Viceversa, se un sistema di assiomi possiede un « modello », esso non è contraddittorio. (Tra parentesi: in un certo senso, il matematico recupera, ma precisandola e limitandone il significato, la intuizione hegeliana secondo la quale « tutto il reale è razionale, e tutto il razionale è reale ».) Allora la questione della unicità, o meno, della geometria metrica euclidea diventa un problema logico-matematico preciso: quello della indipendenza, o meno, del « postulato delle parallele » dai rimanenti. La indipendenza di detto postulato (il « quinto » di Euclide) dagli altri viene infine dimostrata costruendo dei « modelli euclidei » di geometrie non-euclidee. Si conclude che, se la geometria euclidea è coerente, lo sono anche le geometrie non euclidee, formalizzazione dei modelli ai quali sopra si è accennato. Il problema è completamente risolto; un problema che tradizionalmente veniva ritenuto di pertinenza della speculazione filosofica, si rivela invece di natura logico-matematica.

Recentemente, nel 1964, il matematico statunitense Paul Cohen ha risolto un problema analogo, seguendo lo stesso tipo di procedimento: il problema della indipendenza, o meno, dell'assioma della scelta (o di Zermelo) dai rimanenti assiomi della teoria degli insiemi, nella formalizzazione ad essa data da Zermelo e Fraenkel. L'assioma della scelta asserisce che da una infinità comunque grande di collezioni (« insiemi ») è possibile passare a un nuovo insieme, costituito da « rappresentanti » degli insiemi della « famiglia » data, scelti uno, e uno soltanto, per ciascun insieme di detta famiglia. Il risultato di Cohen è sorprendente, direi addirittura « sconvolgente »: *l'assioma della scelta è indipendente dai rimanenti assiomi della teoria di Zermelo-Fraenkel.* Come sono possibili una geometria euclidea, e una geometria non euclidea, cosí sono del pari possibili (compatibili) una matematica zermeliana e una matematica non zermeliana.

Dico che questo risultato è sconvolgente, perché distrugge un'inveterata convinzione, quella della unicità dell'intelletto umano, convinzione alla quale soggiace l'idea (metafisica) della esistenza di *un* « intelletto puro ». Mi sembra chiaro che il risultato logico-matematico di Paul Cohen vada molto al di là di un clamoroso successo « tecnico », e abbia una eccezionale « rilevanza filosofica », per usare una espressione cara a Federigo Enriquez. Io credo che meriterebbe di passare alla storia del pensiero come la « critica dell'intelletto puro » anno 1964 [1].

Quindi, con lo strumento della matematizzazione, e in particolare colla logica matematica, si riescono ad affrontare e risolvere problemi molto elevati che la disputa filosofica nel senso classico non riusciva, non che a risolvere, nemmeno a *porre* in modo preciso. Ciò non significa davvero che la matematica assorba *tutta* la problematica filosofica; abbiamo già parlato all'inizio di uno specifico filosofico come momento della progettazione, dell'utopia, della politica. Insomma, rispetto alla filosofia, cosí come rispetto alle altre dimensioni che abbiamo elencato, il metodo matematico non è « tutto », e nel tempo stesso non si può neppur dire che sia « niente ». È « qualcosa »; ma guai a non occuparsi del « qualcosa », a cercare sempre e soltanto la totalità!

Il terzo esempio che voglio dare di applicazione feconda della logica matematizzata riguarda problemi linguistici, in senso lato. Non intendo tanto riferirmi alla *linguistica matematica*, indirizzo di ricerca destinato quasi certamente a sviluppi importanti, ma ancora, per quel che ne conosco, ai suoi primi passi. Penso piuttosto a concetti generali legati al linguaggio, innanzitutto ai concetti di *sintassi* e di *semantica*.

La differenza tra *corretto* (sintatticamente) e *vero* (semanticamente) fa parte della logica naturale, della « logica quotidiana ». Si può ragionare correttamente, e arrivare a conclusioni false, se si parte da premesse false. Tuttavia, è l'analisi matematica che permette di definire in modo rigoroso ciò che è « corretto », o meglio *deducibile* in una teoria,

[1] Sull'argomento, ho scritto un saggio dal titolo: *Kritik des reinen Verstandes,* nel volume di scritti in onore di Adam Schaff, pubblicato a Vienna a cura di Tasso Borbé, con il titolo: *Der Mensch-Subjekt und Objekt* [L'uomo: soggetto e oggetto]. Un famoso teorema di Gödel, sulla impossibilità di dimostrare la coerenza dell'aritmetica con la formalizzazione logico-matematica dell'aritmetica stessa, è ormai noto come la « critica della ragion pura anno 1931 ».

fissandone gli assiomi e le regole di deduzione. Ed è anche una analisi di tipo logico-matematico che ha consentito al Tarski di precisare il concetto di vero, dal punto di vista semantico, chiamando *vero* ogni enunciato di una teoria formale che sia verificato in ogni sua possibile interpretazione. Nella teoria logico-matematica piú elementare, il « calcolo delle proposizioni », quella alla quale saranno dedicate molte delle lezioni che qui raccogliamo in volume, si perviene a un « metateorema » secondo il quale ogni proposizione deducibile è vera, e viceversa (questo risultato vale anche per ogni « teoria del 1° ordine »; metateorema significa asserzione non *della* teoria che si sviluppa, ma *sulla* teoria stessa). Questa precisa distinzione di livelli ha permesso di sciogliere i famosi paradossi semantici, che derivano — appunto — dalla mancanza di una analisi del linguaggio; della stratificazione, a partire da un linguaggio cosale, puramente indicativo di oggetti, a successivi metalinguaggi, ciascuno dei quali serve a parlare *del* precedente (cosa che non può essere fatta *nel* precedente).

Il quarto ed ultimo esempio di utilizzazione della logica matematica che voglio qui portare è quel complesso di nuove scienze che studiano il comportamento degli automi e la loro costruzione, e che implicano una delicata analisi del linguaggio dal punto di vista operativo, e dal punto di vista del « contenuto di informazione ». Parleremo, per intenderci, di « informatica ».

Mi pare superfluo soffermarmi su questo esempio; forse ho sbagliato, nei tre precedenti, nel cercare di « dare una idea » di questioni che richiedono un tempo, uno spazio, un'attenzione ben piú grandi.

10. *Bisogna cominciare con pazienza dal principio*

Siamo partiti dalla esigenza di interdisciplinarità nell'insegnamento. Abbiamo affermato che, a nostro avviso, interdisciplinarità deve significare soprattutto studio degli « oggetti globali » (natura, società, storia) da punti di vista diversi, con metodi parziali sí, ma indispensabili per poter arrivare a una sintesi il piú possibile unitaria. Abbiamo detto poi che uno di questi metodi è il metodo della formalizzazione, in particolare della matematizzazione. Abbiamo infine esposto i motivi per i quali abbiamo scelto la matematizzazione della logica come esperienza di formalizzazione particolarmente ricca e significativa per la « cultura generale ».

Resta ancora un punto del nostro « gioco » che vogliamo onestamente dichiarare, prima di cominciarlo con chi vorrà accettare la partita con noi. Si tratta di un punto molto importante, che voglio sottolineare: della logica matematica, *abbiamo scelto gli argomenti iniziali* (*propedeutici*), *e cioè elementi di calcolo delle proposizioni e di calcolo dei predicati del 1° ordine.*

Si tratta di argomenti modesti. Non affronteremo nessuna questione grossa. Preannunciamo alle persone colte, ma non esperte di logica matematica, che proveranno quasi certamente un sentimento di delusione seguendo le lezioni che qui si pubblicano. Noi crediamo però di far cosa giusta, cercando di creare nei lettori la capacità, la abitudine della formalizzazione rigorosa, della astrazione, della « convenzione », sviluppando teorie *elementari,* ma in modo corretto e completo. Crediamo di far bene rifiutandoci di affrontare, al di là di qualche indicazione contenuta in questa introduzione, i problemi grossi in modo generico, pseudo-intuitivo, in definitiva disonesto.

L'esperienza che abbiamo fatta *in vivo,* e ci sembra con qualche successo, nel corso CIDI di Roma 1973-74, e che ora consegnamo a un pubblico (soprattutto di colleghi insegnanti) presumibilmente piú vasto, ha avuto e ha come obiettivo quello di dare un aiuto modesto, ma serio, a chi vuole impadronirsi di una mentalità, di un metodo: quello della formalizzazione, approfondendo un capitolo — il primo — della logica matematica.

Barbara Veit Riccioli

Enunciati: un'introduzione elementare

Introduzione

La logica moderna nasce da una riflessione sulle teorie matematiche. Questo fatto va tenuto presente per comprendere le sue ipotesi di lavoro che sono essenzialmente due: (1) la *bivalenza*; (2) la *vero-funzionalità*.

(1) Ogni asserzione è *o vera o falsa*; vero e falso si oppongono senza sfumature intermedie — siamo nell'ambito della logica *bivalente.* Tutta la gamma di « valori di verità » che il linguaggio di tutti i giorni ci suggerisce con le sue espressioni « forse... », « probabilmente... », « è sicuro che... », « è da escludere che... » si contrae nei due soli valori VERO e FALSO, uno e uno solo dei quali compete a ciascuno degli oggetti di cui ci occuperemo [1]. Se la sensatezza e l'utilità di tali sfumature nel linguaggio corrente è fuori discussione, è altresí vero che le scienze esatte, ed in particolar modo la matematica, cercano proprio di *elaborare* proposizioni di cui si possa stabilire senza ambiguità se sono vere o false: il matematico si sforza appunto di procedere con un tale rigore ed una chiarezza tale da poter operare questo taglio netto tra il vero e il falso. Se da un lato una proposizione contemporaneamente vera e falsa costituisce uno scandalo per il matematico — e vedremo piú avanti perché [2] — una proposizione né vera né falsa lo mette particolarmente a disagio,

[1] Esistono anche logiche con piú di due valori di verità, le cosiddette logiche *polivalenti,* vedi per es. J. B. Rosser e A. R. Turquette, *Many-valued logics,* Amsterdam, North-Holland, 1952.

[2] Cfr. p. 64.

come attesta il suo interesse per i vari risultati di incompletezza e di indipendenza, risultati che non di rado vennero a colpire ipotesi piú « ottimistiche » [3].

(2) È possibile scorgere in ogni discorso una struttura logica, cioè possiamo scomporre ogni discorso in una serie di proposizioni elementari legate tra loro da certe particelle logiche — *i connettivi logici* (anche questo termine verrà chiarito in seguito) — in modo tale che la verità o falsità dell'intero discorso *non dipende dal significato specifico delle proposizioni elementari, ma solo dal loro valore di verità*; in altre parole, ogni discorso della stessa struttura logica e con la stessa distribuzione dei valori di verità delle proposizioni elementari ha lo stesso valore di verità. Diciamo che i discorsi da noi studiati sono *vero-funzionali*. La portata di questa seconda ipotesi di lavoro apparirà piú nettamente quando avremo l'occasione di servircene effettivamente nell'elaborazione della nostra logica; ma è facile vedere che la vero-funzionalità è una caratteristica dei discorsi delle teorie ipotetico-deduttive.

Ovviamente, la bivalenza e la vero-funzionalità non sono da prendere nel senso che ogni discorso debba avere queste caratteristiche e che discorsi di altro genere sarebbero da scartare come privi di senso [4]. Sottolineiamo quindi ancora una volta che si tratta di ipotesi di lavoro rispondenti allo scopo prefisso nell'ambito di una riflessione sulle teorie matematiche. Lo stesso fatto che queste ipotesi possano venir formulate cosí esplicitamente è significativo per la logica moderna. Ne risulta in particolare che il logico moderno non indaga ulteriormente sul significato del concetto di verità; egli non si preoccupa neanche di stabilire dei criteri per decidere quali dei due valori di verità spetta ad una data proposizione elementare. In un certo senso, egli evidenzia solo i meccanismi che *preservano* la verità: in presenza di certe proposizioni iniziali egli determina quali sono le proposizioni che risultano vere purché lo siano le prime. Piú precisamente, il logico concepisce un *discorso* come una proposizione P composta da varie proposizioni $p_1, p_2, \ldots p_n$ e cerca di determinare il modo in cui la verità o falsità di P, ovvero il valore di verità di P, dipende dai valori di verità di $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e dalla struttura logica di P, cioè dal modo in cui $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sono connesse dai connettivi che intervengono in P.

Facciamo ora alcune precisazioni terminologiche: rispettando la nostra prima ipotesi di lavoro, cioè il *principio della bivalenza,* prenderemo in esame solo proposizioni di cui ha senso chiedersi se sono vere o false: riserveremo a queste il termine di *enunciati.* Non ci occuperemo dunque di domande, di ordini, desideri, ecc. [5]. Si impone subito una prima distinzione tra enunciati *semplici* o *atomici* e enunciati *composti* o *molecolari*: chiameremo atomici quegli enunciati che non possono essere ulteriormente scomposti in enunciati, cioè in parti di cui ha senso chiedersi se sono vere o false. Per esempio l'enunciato

« Paolo è andato a Ostia »

è atomico, poiché i suoi costituenti, « Paolo », « è andato », « a Ostia », non sono a loro volta enunciati. Invece la proposizione

« Allah è grande e Maometto è il suo profeta »

è un enunciato molecolare composto dai due enunciati « Allah è grande » e « Maometto è il suo profeta » che sono collegati dalla particella « e » [6].

[3] Pensiamo al *programma di Hilbert* con il suo « non esistono *ignorabimus* in matematica », programma che Gödel dimostrò irrealizzabile (cfr. D. Hilbert, *Über das Unendliche,* trad. it. parziale in C. Cellucci, *La filosofia della matematica,* Bari, Laterza, 1967).

[4] Questo atteggiamento è caratteristico del *positivismo logico*, cfr. per es. R. Carnap, *Überwindung der Metaphysik durch logische Analysis der Sprache* (Superamento della metafisica mediante l'analisi logica del linguaggio), in *Erkenntnis,* II, 1932.

[5] Anche espressioni come « un triangolo è rettangolo » non sono enunciati: non possiamo stabilire la loro verità o falsità finché non sappiamo di *quale* triangolo si parla; li chiamiamo perciò *forme enunciative* e li analizzeremo nel secondo capitolo del presente libro.

[6] Il teorema di Pitagora: « Se un triangolo è rettangolo, allora la somma dei quadrati dei suoi lati è uguale al quadrato della sua base » è dunque *atomico* come enunciato, cfr. nota 5.

1. I connettivi logici

Cerchiamo in un primo momento di studiare il ruolo di quelle parole o espressioni della lingua (italiana) che permettono di costruire enunciati molecolari a partire da enunciati atomici. La nostra seconda ipotesi di lavoro, la vero-funzionalità, ci permette di limitare subito la nostra indagine: non tutte le espressioni che legano enunciati tra loro dànno luogo ad un enunciato composto il cui valore di verità risulta univocamente determinato dal valore di verità delle sue componenti; riserveremo a questi il termine di *connettivo logico* e avremo ben presto l'occasione di incontrare espressioni che non fanno parte di questa categoria.

a) *La parola « e »*

Consideriamo i seguenti enunciati:

« Roma è la capitale dell'Italia e Parigi è la capitale della Francia ».

« Piero ha mal di denti e la luna è quadrata. »

« Tanti bambini soffrono la fame e le leggi del mercato portano alla distruzione della frutta. »

« Il ladro ha visto la guardia ed è scappato. »

Si converrà che in questi quattro casi abbiamo a che fare con enunciati molecolari composti ognuno di due enunciati atomici collegati dalla parola « e ». La seconda componente del quarto esempio, « è scappato » non è a rigore un enunciato autonomo, ma è evidente, in questo caso, come in molti altri che seguiranno, in che modo bisogna trasformare l'esempio per ottenere effettivamente due enunciati autonomi.

Il primo enunciato è evidentemente vero, il secondo falso. Perché è falso il secondo? Forse qualcuno dirà che il mal di denti di Piero non ha niente a che fare con la forma della luna? Il logico è del tutto indifferente a simili incongruenze di contenuto: egli vede solo valori di verità. Poiché la luna *non* è quadrata, uno degli enunciati componenti ha il valore di verità FALSO, e perciò l'intero enunciato è falso. Come regola generale abbiamo dunque: se A e B sono enunciati, allora l'enunciato « A e B » — che chiameremo anche la *congiunzione* di A e di B — è vero se e solo se lo sono sia A che B; una congiunzione è quindi falsa non appena uno dei suoi membri è falso.

Questo stesso principio si applica dunque anche agli altri esempi. Essendo effettivamente Roma la capitale d'Italia e Parigi la capitale francese, il primo enunciato riportato è una congiunzione di due enunciati veri e si tratta quindi di un enunciato vero. Gli altri due esempi sono stati scelti per chiarire meglio il principio della vero-funzionalità: chi dice « Tanti bambini soffrono la fame e le leggi del mercato portano alla distruzione della frutta » vuole senz'altro esprimere un certo stupore; egli adopera quindi l'« e » in luogo di un « mentre » o di un « eppure ». Il suo enunciato verrebbe di conseguenza contestato da parte di una persona che non condivide questo stupore sostenendo per esempio la necessità di tenere alti i prezzi. Un'argomentazione del genere non muoverebbe da una analisi dei valori di verità degli enunciati componenti: nessuno negherà che vi è la fame nel mondo e che molti prodotti della terra vengono distrutti — ma c'è chi ne trae motivo per discutere l'adeguatezza del nostro sistema economico alle esigenze della società e chi pensa invece che dubbi del genere siano infondati. Simili disaccordi non sono analizzabili sulla sola base dei valori di verità dei due enunciati che compongono l'esempio che stiamo esaminando. Le parole « mentre », « eppure », « ciononostante », ecc. *non* sono dunque connettivi logici. Anche nell'esempio del ladro che scappa alla vista della guardia possiamo immaginare un qualche testimone che contesta la verità dell'enunciato per ragioni non analizzabili in termini di valori di verità: si sosterrà magari che il ladro è sfuggito *prima* che si accorgesse della guardia, o che il *motivo* della fuga non era tanto la guardia quanto un inquilino che aveva dato l'allarme. In questi casi, a mettere in causa l'intero enunciato sono i legami *causali* o *temporali* tra gli enunciati componenti, non il loro valore di verità. Per suggerire rapporti di questo genere utilizziamo piú volentieri espressioni come « poi », « quindi », « perché » ecc.; anche queste parole dunque non sono connettivi logici. Ripetiamo: *un connettivo logico è un'espressione linguistica che lega due enunciati in modo tale che risulti un enunciato la cui verità o falsità dipende* unicamente *dall'essere vero o falso dei componenti.*

Possiamo ora riassumere il nostro studio del connettivo « e » in una tavola:

TAV. 1 - *Il connettivo « e »*

Valore di verità dell'enunciato *A*	Valore di verità dell'enunciato *B*	Valore di verità della congiunzione di *A* e di *B*
VERO	VERO	VERO
VERO	FALSO	FALSO
FALSO	VERO	FALSO
FALSO	FALSO	FALSO

Per mettere meglio in risalto il processo di formalizzazione che stiamo avviando, abbandoneremo ora la scrittura VERO e FALSO per i due valori di verità; scegliamo due simboli semplici per indicarli, precisamente **1** per il VERO e **0** per il FALSO. Avremmo potuto scegliere anche + e — oppure *a* e *b*, o insomma due simboli qualsiasi purché distinguibili. L'adozione di **1** e **0** è comunque la piú diffusa nei manuali di logica. Anche per il connettivo « e » introduciamo un simbolo: $\wedge$. Con queste convenzioni, la nostra tavola della congiunzione prende il seguente aspetto:

TAV. 2 - *La congiunzione*

A	*B*	$A \wedge B$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

La logica di cui stiamo dando gli elementi è *formale*: ciò non perché abbiamo introdotto dei simboli formali nella sua elaborazione — per questa ragione merita semmai il titolo di *simbolica*[7]. Il passo formalizzante è stato compiuto all'inizio, con l'adozione dei due princípi della bivalenza e della vero-funzionalità. La formalizzazione viene solo ulteriormente evidenziata con l'uso dei simboli: l'arbitrarietà nella scelta dei simboli per i valori di verità sta a indicare che il concetto di verità di cui ci serviamo è totalmente affrancato da ogni presupposto metafisico o di altro genere. Nell'attribuzione del valore **1** ad un determinato enunciato, ogni « utente » della logica è completamente libero: il matematico lo darà ad ogni enunciato dimostrabile, il fisico ad ogni enunciato che può verificare con determinati metodi sperimentali, il giurista ad ogni enunciato che può stabilire sulla base della costituzione, il teologo si riferirà alla bibbia o al papa...; ma chi dà il valore **1** ad $A \wedge B$ deve dare il valore **1** sia ad *A* che a *B*!

b) *La parola « o »*

Consideriamo ancora qualche esempio:

« In Canada Paolo ha imparato l'inglese o il francese ».

« Nascerà una femmina o un maschio. »

[7] I termini « logica simbolica » e « logica formale » vengono spesso usati come sinonimi: cfr. Agazzi [1]. (La bibliografia di questo capitolo e quella del successivo sono state unificate. Pertanto i numeri tra parentesi quadre rimandano ai testi elencati alle pp. 103-104.)

« Qui si salva l'Italia o si muore. »
« A tavola, una persona educata o mangia o parla. »

Siamo di nuovo in presenza di una serie di enunciati molecolari; gli accorgimenti per isolare ogni volta due enunciati effettivamente autonomi sono analoghi a quelli già discussi in relazione al connettivo « e ». Vediamo allora di scoprire quale legame realizza la parola « o » tra i valori di verità dell'enunciato composto e i valori dei suoi costituenti. Invitiamo il lettore a prendere una matita e provare a compilare egli stesso la tavola che già abbiamo preparata per lui:

Valore di verità del primo membro	Valore di verità del secondo membro	Valore di verità dell'enunciato composto			
		Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Il secondo esempio è forse il piú semplice: di fatto, solo due casi possono presentarsi: o nasce una femmina, e allora l'enunciato « nascerà un maschio » risulterà falso, oppure nasce un maschio, e allora era falso l'enunciato « nascerà una femmina ». Che entrambi gli enunciati siano veri o entrambi falsi è semplicemente impossibile (a meno che non nascano gemelli!). Chi pronuncia questa frase, mettiamo una giovane donna che sta scegliendo i nomi per il primogenito, vuole esprimere proprio questo servendosi del connettivo « o »: dei quattro casi *logicamente* possibili, due vengono dichiarati per impossibili *di fatto*, cioè quello in cui entrambi gli enunciati componenti sono falsi o quello in cui entrambi sono veri, mentre nei due casi rimanenti, quelli in cui esattamente uno dei due enunciati risulta vero, risulterà vero l'intero enunciato. La tavola corrispondente è quindi:

TAV. 3 - « *o* » *esclusivo* (*aut-aut*)

A	B	$A \veebar B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Questa tavola è caratteristica per l'« o » *esclusivo* che corrisponde al latino *aut-aut:* bisogna scegliere — o l'uno, o l'altro, ma non entrambi. Il famoso detto garibaldino del terzo esempio ne dà un'altra versione; l'appassionato di letteratura classica preferirà la versione amletica: *to be or not to be* — che rende perfettamente l'idea, ma sfortunatamente non è un enunciato.

Esaminiamo ora il primo esempio, quello che riguarda le esperienze linguistiche che Paolo ha fatto in Canada: se Paolo sa al suo ritorno sia l'inglese che il francese, ha torto o no chi aveva detto « In Canada, Paolo ha imparato l'inglese o il francese »? Diremmo senz'altro che ha ragione, poiché il suo enunciato non escludeva affatto tale eventualità — anzi, magari Paolo aveva scelto il Canada proprio per imparare entrambe le lingue. Su questo punto, il caso in cui entrambi gli enunciati componenti siano veri, questo « o » differisce dunque da quello prima esaminato! Vediamo gli altri casi: se Paolo torna sapendo solo il francese o solo l'inglese, il nostro enunciato sarà vero lo stesso; solo se Paolo non ha imparato nessuna delle due lingue, diremo che quell'enunciato era falso. Risulta cosí la tavola seguente:

TAV. 4 - « *o* » *disgiuntivo* (*vel*); *la disgiunzione*

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Chiaramente, pur trattandosi della stessa espressione, « o », le tavole 3 e 4 differiscono nella prima riga: un enunciato composto di due enunciati veri risulta falso in un caso, vero in un altro, anche se la stessa espressione linguistica realizza il legame. Ebbene, questo è un caso in cui la lingua italiana — e non solo essa — è poco precisa. Il latino distingue tra il *vel* e l'*aut-aut* — noi ci serviremo di due simboli diversi: adoperiamo il simbolo $\vee$ (che ricorda il latino *vel*) quando si tratta di un « o » non-esclusivo, invece il simbolo $\dot{\vee}$ per l'« o » esclusivo. Torniamo un attimo sull'esempio: « Nascerà una femmina o un maschio » e prendiamo sul serio la voce che malignamente aveva evocato la possibilità che nascessero gemelli, un maschio e una femmina. Sarà allora vero o falso l'enunciato in questione? È difficile dirlo, poiché la mamma non conosceva le nostre tabelle e non ha specificato quale dei due « o » stava usando...

Dopo aver notate queste ambiguità della lingua corrente, non ci stupiremo se ora incontriamo un terzo « o » che il quarto esempio illustra, « A tavola, una persona educata o mangia o parla »: si considera di solito che è poco educato chi parla mentre sta masticando — o si parla o si mangia. Ma se uno sta in silenzio a tavola senza tuttavia mangiare? Non gli daremo del maleducato! Si voleva solo dire che le due attività sono incompatibili secondo i codici della buona educazione. Questo terzo « o », quello che esprime l'*incompatibilità,* ci fornisce dunque la tavola seguente:

TAV. 5 - *L'*« *o* » *della incompatibilità*

A	B	$A \mid B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Scriviamo $A \mid B$ se i valori di verità di A e di B determinano in questo modo il valore di verità dell'enunciato che risulta da una loro composizione.

Riassumiamo:

— « o » *esclusivo* (*aut-aut*): vero se è vero *uno e uno solo* dei due enunciati, falso altrimenti; in simboli: $A \dot{\vee} B$;

— « o » *non-esclusivo o disgiuntivo* [8] (*vel*), reso forse piú adeguatamente da « o anche »: vero non appena *almeno uno* degli enunciati è vero, falso solo se lo sono entrambi; in simboli $A \vee B$;

— « o » dell'*incompatibilità:* falso se *entrambi* gli enunciati sono veri, e vero in tutti gli altri casi; in simboli: $A \mid B$.

Vorremmo far notare che il matematico usa in genere il secondo « o », quello disgiuntivo: infatti, quando dice che l'unione di due insiemi ha per elementi tutti quegli elementi che appartengono all'uno *o* all'altro dei due insiemi, non esclude gli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi, ovverosia alla loro intersezione. Riserveremo perciò ad

[8] Alcuni autori chiamano *alternativa* la composizione di due enunciati con questo connettivo, cfr. per es. Casari [8], p. 29.

enunciati composti di due enunciati mediante l'« o » disgiuntivo il termine di *disgiunzione* in modo da avere una certa corrispondenza tra operazioni logiche e insiemistiche essa si riflette anche nei simboli piú usuali: disgiunzione ($\vee$)/ congiunzione ($\wedge$) — unione ($\cup$)/ intersezione ($\cap$)[9].

Speriamo di aver convinto il lettore che le analisi precedenti non sono prive di interesse, anche se abbiamo utilizzato un materiale assai modesto. L'aritmetica non prende forse le mosse da costatazioni semplicissime come « $2 + 2 = 4$ »? Il motivo per cui abbiamo scelto esempi elementari non è però solo di natura didattica; ci premeva anche di far vedere che la logica del matematico non è diversa da quella dei « comuni mortali ». La matematica nasce dalla vita quotidiana, e cosí anche la logica del matematico. Anche se piú avanti spingeremo la formalizzazione fino a manipolare certi complessi simbolici senza mai riferirci a quello che significano, vorremmo che sia chiaro fin d'ora che l'astrazione dal significato è un'esigenza metodologica, garanzia di rigore; ma non si tratterà mai di un gioco piú o meno divertente secondo regole imposte piú o meno arbitrariamente. Che un tale rigore sia fuori posto o superfluo nella vita quotidiana, non deve farci dimenticare che la logica, anche e anzitutto quella formale, trae la sua forza e il suo fondamento dalla esperienza che ognuno di noi fa con il vero e il falso ogni giorno. Per questo la logica è applicabile. Se infatti l'ideale del logico matematico è di costruire un sistema che gli permette di passare da una configurazione di simboli ad un'altra sulla base di regole prestabilite, non si vede perché questa manipolazione di simboli dovrebbe condurre a risultati piú attendibili di quelli elaborati con l'aiuto della nostra intelligenza ragionante, se queste regole non avessero il loro fondamento proprio nelle leggi del pensiero umano.

[9] La ricerca sistematica dell'analogia tra operazioni logiche e operazioni insiemistiche è l'oggetto del *calcolo delle classi* che, nelle sue linee essenziali, sta alla base del pensiero di uno dei pionieri della logica matematica, George Boole (cfr. G. Boole, *Analisi matematica della logica,* trad. it. Milano, Silva, 1965).

c) *L'espressione « se... allora... »*

Questo connettivo è piú complesso di quelli studiati finora. Intanto, a differenza di questi, occorrono due parole per esprimerlo; ecco perché dobbiamo definire un connettivo come « espressione » e non semplicemente come « parole ». Anche il posto che prende questo connettivo nell'enunciato composto è diverso dai casi che abbiamo prima incontrati, dove il connettivo veniva collocato *tra* i due enunciati da congiungere. Si converrà però che queste sono difficoltà apparenti. Se sostituiamo i puntini in « se..., allora... » con enunciati, otteniamo ancora un enunciato. Resta da vedere se e come il valore di verità di un enunciato siffatto viene determinato dai valori di verità dei suoi componenti.

Vediamo dunque di nuovo qualche esempio:

« Se 13 divide 3.444, allora 26 divide 6.888 ».

« Se Marco supera il prossimo esame, allora suo padre gli regala una motocicletta. »

« Se debbo andare in URSS, allora mi occorre un visto. »

« Se hai ragione tu, allora io sono l'imperatore della Cina. »

« Se 8 divide 100, allora 8 divide 200. »

« Se la temperatura supera i 100 gradi, allora il materiale subisce alterazioni. »

Invitiamo di nuovo il lettore a mettersi al lavoro egli stesso per riempire la tavola qui sotto tracciata:

A	B	Se *A*, allora *B*					
		Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

Pensiamo che tutti avranno riempito la prima riga con **1** e la seconda con **0**. Usando « se... allora...» si vuole appunto dire che, se la prima cosa è vera, lo è anche la seconda: si nega che possa essere vera la prima e falsa la seconda; diciamo che un'*implicazione* è vera se sia l'*antecedente* che il *conseguente* sono veri, falsa invece se, pur essendo vero l'antecedente, il conseguente è falso. Nessun problema dunque finché l'antecedente è vero.

Ma se l'antecedente è falso? Prendiamo subito il primo esempio: l'antecedente è falso, 13 non divide affatto 3.444; eppure qualcuno ragionerà cosí: se fosse vero che 13 divide 3.444, poiché 6.888 è il doppio di 3.444 e 26 è il doppio di 13, sarebbe anche vero che 26 divide 6.888.

Potremmo anche riferirci al principio piú generale secondo cui, se x divide y, allora $2x$ divide $2y$, qual che siano i numeri x e y [10]. Abbiamo dunque un'implicazione *vera* con antecedente e conseguente falso. Passiamo al prossimo esempio: « Se Marco supera il prossimo esame, allora suo padre gli regala una motocicletta ». Supponiamo di nuovo che l'antecedente sia falso: Marco viene bocciato all'esame in questione. Vi sono allora due possibilità: o Marco riceve la motocicletta lo stesso, o non la riceve; può darsi che il padre rimandi il regalo fin quando Marco ha migliori risultati, può anche darsi che il padre non si ritenga vincolato nella sua generosità dai successi scolastici di suo figlio. In presenza di un antecedente falso, il conseguente è dunque « libero » di prendere uno qualunque dei due valori di verità senza compromettere la verità dell'intero enunciato: *un'implicazione è sempre vera, a meno che l'antecedente sia vero mentre il conseguente è falso.* La tavola corrispondente si presenta dunque come la tavola 6.

Utilizzeremo il simbolo $\rightarrow$ se il valore di verità di un enunciato composto dipende in questo modo dai valori di verità degli enunciati che lo compongono e lo chiameremo, come già detto, un'implicazione.

10 Cfr. piú avanti, p. 48.

TAV. 6 - *L'implicazione*

A	B	$A \rightarrow B$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**

Molti lettori saranno rimasti un po' perplessi per queste analisi; cercheremo in seguito di chiarire e dissipare i motivi di questa impressione. Il terzo esempio è stato riportato per illustrare una situazione che si incontra molto frequentemente quando si usa il « se... allora... » e che dà ragione a chi risente di una certa artificiosità quando si prendono in considerazione implicazioni con antecedenti falsi: mettiamo che Paolo si presenta ad uno sportello del ministero degli esteri e dice all'impiegato: « Ho saputo che occorre un visto se si vuole andare in URSS. È vero o è falso? ». L'impiegato risponderà senz'altro: « È vero: non può entrare nell'Unione Sovietica senza visto ». Se poi Paolo insiste: « Ma se *non* voglio andare in URSS? »; con ogni probabilità, l'impiegato gli indicherà allora l'uscita! Infatti, nella vita quotidiana, il « se... allora... » si usa generalmente solo quando l'antecedente è vero. Cioè, di solito non si tengono presenti tutti i quattro casi logicamente possibili, ma solo i due casi in cui l'antecedente è vero. Lo studio di un'implicazione con antecedente falso comporta dunque una certa artificiosità. Per questa ragione abbiamo affiancato l'esempio matematico citato per primo con un altro esempio, tratto questa volta da un contesto piú familiare, e nel quale l'impiego di un antecedente falso è invece perfettamente adeguato alle circostanze: « Se hai ragione tu, allora io sono l'imperatore della Cina ». Un enunciato simile viene rivolto ad una persona cui si vuole far capire indirettamente che ha torto; questo scopo viene raggiunto traendo dall'assunzione del contrario una conclusione assurda: « Io sono l'imperatore della Cina ». La scelta di un conseguente falso è in questo caso dunque un modo efficace per mettere in rilievo la falsità dell'antecedente. Di questo uso del « se... allora... » si possono trovare numerosi esempi; del resto, il lettore non avrà difficoltà a riconoscere in questa versione della implicazione il principio della *dimostrazione per assurdo* [11].

In un'implicazione vera, la falsità del conseguente comporta dunque la falsità dell'antecedente, in perfetta conformità con la tavola 6. Ma molte volte, l'uso del « se... allora... » sottintende che la falsità dell'antecedente comporti anche la falsità del conseguente; quest'atteggiamento non è però compatibile con la nostra tavola: ad un enunciato del tipo « se A, allora B » viene cosí assegnato il valore **0** se A è falso e B vero. Sarebbe questo il caso di Marco qualora si aspettasse di non ricevere piú la motocicletta dal momento che ha mancato l'esame. Anche a proposito dell'ultimo esempio: « Se la temperatura supera i 100 gradi, allora il materiale subisce alterazioni » possiamo immaginare una situazione analoga: una massaia legge quest'enunciato in una istruzione di lavaggio e conclude che in un bucato con acqua tiepida il tessuto non si rovinerà. In questi casi, il buon senso suggerirebbe dunque piuttosto la tavola seguente:

TAV. 7 - *L'equivalenza logica « se e solo se »*

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**1**

[11] Cfr. anche p. 61.

Questa tavola differisce dalla tavola 6 nella terza riga: l'enunciato composto risulta falso se il primo costituente è falso e il secondo è vero. La tavola 7 si può cosí riassumere: l'enunciato composto è vero se e solo se i valori di verità delle sue componenti coincidono; il logico parla in questi casi di *equivalenza logica* e usa piuttosto « se... e solo se... » per distinguere la struttura logica di enunciati siffatti dalle implicazioni. Il simbolo che viene solitamente impiegato per questo ultimo connettivo è il seguente: $\leftrightarrow$.

Ora, non esistono istruzioni di lavaggio redatte in termini di « se... e solo se... », né padri che promettono regali in termini di equivalenze logiche. Nella vita quotidiana succede raramente che si parli con quella neutralità, con quella categoricità che esclude qualunque significato sottinteso e si presta quindi ad un esame della struttura logica che tenga conto unicamente dei valori di verità dei componenti di un enunciato. La lingua di tutti giorni si può permettere il lusso di usare i connettivi in modi diversi, poiché dispone di tante risorse come l'intonazione, il contesto, il rapporto umano tra gli interlocutori ecc., che chiariscono la situazione logica meglio di ogni tavola di verità (cosí si chiamano le tavole che abbiamo elaborate). Difatti, se un enunciato come « Se la temperatura supera i 100 gradi, allora il materiale subisce alterazioni » fosse scritto, invece che in un'istruzione di lavaggio, su un foglio di analisi da laboratorio, si esiterebbe probabilmente prima di concludere che il materiale non viene danneggiato se lo si espone a temperature inferiori ai 100 gradi, e ciò perché da un contesto pratico siamo passati a un contesto scientifico.

Il lettore abituato al ragionamento matematico non avrà difficoltà a rendersi conto che la differenza tra l'implicazione e l'equivalenza logica è fondamentale nei contesti matematici: molte volte sorge la domanda se vale anche l'inverso di un teorema, se cioè, oltre a « se A, allora B » vale anche « se B, allora A ». Per esempio, si ha sia « Se x divide y, allora $2x$ divide $2y$ » che « Se $2x$ divide $2y$, allora x divide y ». Invece vale « se x divide y, allora x divide $2y$ », ma non « se x divide $2y$, allora x divide y » come dimostra l'esempio $x = 8$ e $y = 100$: 8 non divide 100, eppure 8 divide 200. Quest'ultimo esempio illustra assai bene come sia sbagliato concludere da « Se A, allora B » a « Se non-A, allora non-B », e che invece un'implicazione con antecedente falso è vera anche se il conseguente è vero.

I logici del medioevo hanno formulato un semplice detto che riguarda le implicazioni con antecedente falso: *Ex falso sequitur quodlibet*. Questa è forse la migliore giustificazione del principio qui adottato secondo cui un'implicazione con antecedente falso è *sempre* vera. Il motivo per cui il senso comune dimostra una certa reticenza di fronte ad implicazioni siffatte risulta forse piú chiaro adesso: la falsità dell'antecedente fa sí che non possiamo concludere niente.

Un'ulteriore difficoltà circa l'uso del « se... allora... » viene senz'altro dal fatto che spesso si sottintende un legame di natura causale tra due enunciati cosí collegati. Abbiamo già detto che il nostro interesse è rivolto unicamente ai valori di verità degli enunciati, e questi non possono rendere conto di simili rapporti tra i *significati* delle varie componenti del discorso. Per questa ragione, anche due enunciati completamente eterogenei possono essere uniti in un'implicazione, e non ci meraviglieremo di esempi come « Se i gatti hanno le ali, allora $2 + 2 = 5$ ». Anche se quest'enunciato non è molto sensato, il logico è disposto ad assegnargli il valore di verità **1**. Si dà il caso che enunciati del genere si trovano solo nei manuali di logica, mentre nessun « comune mortale » dice mai un simile nonsenso. Il lettore potrà trarne conclusioni disastrose circa la « comune mortalità » dei logici; lo preghiamo comunque di non fondare i suoi dubbi sull'adeguatezza del concetto di verità qui elaborato su esempi del genere.

Un'implicazione è particolarmente paradossale quando è formata a partire da due enunciati i cui valori di verità sono già conosciuti, come succede per esempio quando qualcuno

sta in pieno sole su una strada asciutta e ne trae motivo per affermare che l'enunciato « Se piove, allora la strada è bagnata » è vero. Del resto, le stesse perplessità di presentano di fronte ad un enunciato come « Questa persona è un uomo o una donna » quando si tratta visibilmente di una donna.

Cerchiamo di comprendere bene a che cosa sono dovute queste perplessità! Ogni enunciato atomico ha in ogni circostanza — almeno teoricamente — un ben determinato valore di verità, e la verità o meno di un enunciato composto è funzione di *questi* valori: nel momento in cui viene pronunciato, l'enunciato composto è o non è vero, secondo la particolare combinazione in quel momento dei valori di verità degli enunciati atomici che lo compongono. Come dice Wittgenstein nel suo *Tractatus logico-philosophicus*: « L'enunciato è l'espressione del suo accordo o disaccordo con i valori di verità degli enunciati atomici » (4.4). Ora, l'accordo di un enunciato del tipo « Se A allora B » si verifica in tre occasioni: può essere che A e B sono entrambi veri, o che A è falso e B vero, o infine, A e B possono essere entrambi falsi; anche per un enunciato del tipo « A o B » abbiamo trovato piú di una situazione nella quale sussiste un simile accordo. Dalla verità di un enunciato composto non sempre possiamo dunque risalire con precisione alla verità o meno degli enunciati che lo compongono. Wittgenstein osserva a questo proposito: « Le condizioni di verità di un enunciato determinano il margine che l'enunciato lascia ai fatti » (4.463)[12]. Il motivo delle nostre perplessità si potrebbe quindi spiegare dicendo che abbiamo citato degli enunciati che lasciano « troppo » margine ai fatti cui *attualmente* si riferiscono.

Situazioni come quelle sopra citate non costituiscono certo il miglior banco di prova per sperimentare l'adeguatezza dei nostri connettivi nella descrizione del mondo: la realtà che

[12] Il *Tractatus* è pubblicato in trad. it. da Einaudi, Torino, 1964 (la traduzione riportata qui e altrove nel testo è comunque nostra). Osserviamo per inciso che Wittgenstein chiama « condizioni di verità di un enunciato » quelle combinazioni di valori di verità delle componenti atomiche che rendono vero l'intero enunciato.

cerchiamo di captare attraverso i nostri discorsi varia, e la descrizione di singole situazioni non è che il punto di partenza per cogliere una pluralità di situazioni in evoluzione. Riesaminiamo allora l'enunciato « Se piove, allora la strada è bagnata » in questa prospettiva. Di solito, diciamo che questo enunciato è vero, non già perché abbiamo controllato la situazione meteorologica e lo stato della strada prima di pronunciarlo, ma perché ce lo insegna l'esperienza: in innumerevoli occasioni abbiamo verificato che singoli enunciati del tipo « Se piove qui e adesso, allora qui e adesso la strada è bagnata » erano veri. In termini piú formali, abbiamo la seguente esperienza: il valore di verità di « piove » cambia da un'ora all'altra e da un luogo all'altro e lo stesso avviene per il valore di verità di « la strada è bagnata »; ma, che brilli il sole, o che piova, che la strada sia asciutta o bagnata, il valore di verità di « se piove, allora la strada è bagnata » è *sempre e dovunque* **1**: non incontriamo mai una situazione nella quale piova mentre la strada rimane asciutta. Considerazioni analoghe valgono del resto per un enunciato del tipo: « Questa persona è un uomo o una donna ». Anche nel nostro primo esempio di implicazione: « Se 13 divide 3.444, allora 26 divide 6.888 » ci eravamo riportati a tutti gli enunciati del tipo « se x divide y, allora $2x$ divide $2y$ », dove a x e a y sono da sostituire particolari numeri. Solo in relazione a tutti questi enunciati, la scelta del « se... allora... » appare giustificata; difficilmente verrebbe scelto proprio questo connettivo da parte di una persona che già sa che 13 non divide 3.444. Analogamente, è perché a *chiunque* voglia recarsi in URSS occorre un visto che una *determinata* persona dice: « se *io* debbo andare in URSS, allora *mi* occorre un visto ».

Se dunque gli enunciati sopra citati lasciavano « troppo margine » ai fatti, se vengono riferiti ad una particolare situazione, essi circoscrivono in maniera significativa il margine entro il quale varia una pluralità di fatti. Accade spesso che un'implicazione unisce solo formalmente due enunciati atomici che si riferiscono ad una precisa situazione attuale, mentre il riferimento ad una pluralità di situazioni variabili

è presente implicitamente ed è il motivo per cui proprio questo connettivo è stato scelto. Occorrono tuttavia nuove tecniche per rendere esplicito il modo in cui ci riferiamo ad una totalità di fatti per determinare al suo interno il margine che il discorso lascia, non a fatti singoli, ma alla loro variazione. Non dimentichiamoci che la logica degli enunciati non è che il primo capitolo della logica; facciamo solo i primi passi verso una logica che sappia cogliere tutta la variabilità che il discorso può esprimere: dobbiamo trovare il modo di analizzare i vari parametri dai quali dipendono i cambiamenti dei valori di verità che finora abbiamo osservati solo « da fuori », senza entrare nella struttura interna degli enunciati [13]. Il ruolo della logica degli enunciati è comunque fondamentale: anche se piú avanti disporremo di strumenti di analisi piú raffinati, in definitiva ci ricondurremo sempre ad un esame dei valori di verità di enunciati atomici collegati mediante connettivi; la verità o falsità di un discorso che si riferisce ad una pluraltà di situazioni verrà ricondotta alla verifica di ogni singola situazione che fa parte di questa pluralità.

d) *La parola « non »*

La negazione, fondamentale per ovvie ragioni, può venir descritta molto facilmente con i mezzi di cui ora disponiamo: la negazione di un enunciato vero è falsa, la negazione di un enunciato falso è vera. La corrispondente tavola è dunque presto fatta:

TAV. 8 - *La negazione*

A	$\neg A$
1	**0**
0	**1**

13 Cfr. il secondo capitolo, dedicato alla logica dei predicati.

Scriveremo $\neg A$ (a parole: « non-A ») quando avremo a che fare con la negazione di un enunciato A. Il lettore non avrà difficoltà ad elaborare numerosi esempi. Potrà sembrare impropria l'applicazione del termine connettivo a questo operatore logico, poiché la negazione agisce su un solo enunciato: non connette due enunciati tra loro come facevano i connettivi finora incontrati. La terminologia logica include comunque anche la negazione tra i connettivi; volendo, si potrà specificare che si tratta di un connettivo *monoargomentale*.

2. *Le funzioni di verità*

Abbiamo definito i connettivi logici come quelle parti del discorso che permettono la costruzione di enunciati composti a partire da enunciati piú semplici. Guardando però un po' da vicino alcune espressioni linguistiche di questo tipo, ci siamo accorti che una stessa espressione linguistica può, secondo il contesto, assumere diverse funzioni logiche. Ma, dal momento che la logica si propone appunto di stabilire i criteri per la verità o falsità di un discorso indipendentemente dal significato particolare degli enunciati che lo compongono, occorre distinguere le varie funzioni logiche che il linguaggio affida ad una stessa espressione. L'elaborazione di varie *tavole di verità,* che illustrano come un enunciato composto dipende dai valori di verità dei suoi componenti secondo il connettivo usato per la composizione, ci è parso un valido strumento nella nostra analisi. Vedremo nel seguito come l'utilizzazione sistematica di simili tavole permette di affrontare molti problemi logici mediante un vero e proprio *calcolo.*

Consideriamo per cominciare il seguente ragionamento:

(1) « Se il Milan vinceva la partita contro la Juventus, rimaneva campione d'Italia. Ma invece il Milan è stato sconfitto, e quindi ha perso il titolo ».

Indichiamo con A l'enunciato « il Milan vinceva la partita contro la Juventus », e con B l'enunciato « il Milan rimaneva campione d'Italia ». L'enunciato (1) prende allora questa forma:

$$[(A \rightarrow B) \wedge (\neg A)] \rightarrow \neg B.$$

Secondo la tavola di verità per l'implicazione, questo ragionamento è corretto se e solo se non si verifica mai che sia vero l'antecedente di (1), cioè $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A)$, pur essendo falso il conseguente, cioè $\neg B$. Nel caso specifico, falso $\neg B$ significa: B è vero: il Milan rimaneva campione d'Italia; vero $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A)$ significa che intanto è vero $(\neg A)$, poiché si tratta di una congiunzione: il Milan non vinceva dunque la partita contro la Juventus. Ma dev'essere anche vero $A \rightarrow B$, cioè, se il Milan batteva la Juventus, rimaneva campione d'Italia. Ora, questo è possibile, è una questione di punti: se il Milan aveva un vantaggio sufficientemente grande da potersi permettere anche una sconfitta senza perdere il titolo, vale a piú forte ragione che rimaneva campione in caso di vittoria. Comunque, dalla sua sconfitta non segue necessariamente che abbia perso il titolo. Il ragionamento che stiamo analizzando riproduce esattamente quello sbaglio che a suo tempo avevamo spiegato con la tendenza di concludere dalla falsità dell'antecedente di un'implicazione alla falsità del conseguente.

Sarebbe invece stato corretto quest'altro ragionamento:

(2) « Se il Milan vinceva la partita contro la Juventus, rimaneva campione d'Italia. Ma invece ha perso il titolo, dunque ha subíto una sconfitta o ha solamente pareggiato », in simboli:

$$[(A \rightarrow B) \wedge (\neg B)] \rightarrow \neg A.$$

Qui si conclude dalla falsità del conseguente alla falsità dell'antecedente dell'implicazione: $A \rightarrow B$: se B è falso, se cioè il Milan perdeva il titolo, perché sia anche vero $(A \rightarrow B)$, occorre che anche A sia falso, cioè che il Milan non vinceva la partita. A falso e B falso è dunque condizione necessaria e sufficiente affinché la congiunzione $[(A \rightarrow B) \wedge (\neg B)]$, che figura da antecedente nella implicazione (2), sia vera. In tal caso, il conseguente di (2) è necessariamente vero. Quindi, (2) non può essere un'implicazione falsa, poiché per questo dovremmo trovare il modo di rendere falso il conseguente pur essendo vero l'antecedente.

Invece di fare queste considerazioni piuttosto complicate, possiamo eseguire un semplice calcolo, servendoci delle tavole di verità: prepariamo una tavola con quattro righe, una per ogni possibile combinazione dei valori di verità di A e di B. Valutiamo poi, per ogni tale combinazione, le singole espressioni che compaiono in (1) e in (2) in conformità con le tavole di verità dei vari connettivi che intervengono. Se procediamo in questa valutazione *dall'interno delle parentesi all'esterno,* avremo da valutare di volta in volta solo espressioni nelle quali il connettivo si applica ad argomenti già valutati:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge \neg A$
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
(*a*)		(*b*)		(*c*)	(*d*)

$(A \rightarrow B) \wedge \neg B$	$[(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow \neg B$	$[(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow \neg A$
0	**1**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**
1	**1**	**1**
(*e*)	(*f*)	(*g*)

Nelle prime due colonne presentiamo le quattro combinazioni dei valori di verità di A e di B; le due colonne successive vengono calcolate in conformità con la tavola di $\neg$ a partire dalle prime due colonne. La colonna (*c*) si ottiene dalle colonne di (*a*) tenendo presente la tavola di verità di $\rightarrow$. Per calcolare la colonna (*d*) si confrontano la colonna (*c*) e la prima delle due colonne di (*b*); analogamente si ottiene la colonna (*e*) dalla colonna (*c*) e dalla seconda colonna di (*b*), rispettando le regole che governano l'uso di $\wedge$. Infine, (*f*) e (*g*), che non sono altro che la valutazione di (1) e di (2), si calcolano sulla base della tavola di $\rightarrow$ confrontando la colonna (*d*) con la quarta, risp. la colonna (*e*) con la terza.

Le prime volte sarà un po' lungo effettuare questi calcoli, ma facendo pratica si andrà piú veloci. Comunque, la loro esecuzione è puramente meccanica, non c'è nessun bisogno di un esperto di calcio per portarli a fine. Anzi, non abbiamo tenuto nessun conto degli enunciati A e B che facevano parte del nostro breve discorso. Questo significa dunque che, *quali che siano gli enunciati A e B,* un enunciato della forma (1) non è sempre vero, mentre un enunciato della forma (2) è sempre vero. In altri termini, se, nell'espressione

(1') $$[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$$

sostituiamo p e q con due enunciati, allora si ottiene un enunciato vero solo in alcuni casi, mentre nell'espressione

(2') $$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$

ogni sostituzione di p e q con enunciati dà luogo ad un enunciato vero. La giustificazione è questa: interpretiamo $\wedge$, $\neg$, e $\rightarrow$ come *operazioni* eseguite sui simboli **1** e **0** in conformità alle rispettive tavole; allora la (2') rappresenta una *funzione* a due argomenti che qui abbiamo rappresentati con le lettere p e q, che assume *costantemente* il valore **1**, mentre la (1') rappresenta una funzione che assume il valore **1** salvo nel « punto » $(p, q) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ (vedi la terza riga della tavola di valutazione sopra elaborata. Sulla nozione di funzione, cfr. il par. 4.1 del capitolo seguente).

Ora, è facile vedere che ogni discorso che soddisfa le nostre due ipotesi di lavoro, la bivalenza e la vero-funzionalità, determina una simile funzione, che chiamiamo perciò la *funzione di verità* associata al discorso: per prima cosa associamo ad ogni enunciato atomico che interviene nel discorso un certo numero naturale n. Scriviamo p_n al posto dell'enunciato con il numero n. Ogni volta che incontriamo un enunciato composto, mettiamo il simbolo del connettivo adatto tra i segni adottati per rappresentare le sue componenti e mettiamo tra parentesi il complesso simbolico cosí ottenuto. Vedremo tra breve che i connettivi finora studiati sono sufficienti per rendere conto di *ogni* situazione logica che si possa incontrare. A questo punto non ci resta che da calcolare una tavola di verità piú o meno complessa, secondo il numero degli enunciati atomici che compaiono nel nostro discorso. Se il risultato di questi calcoli è sempre **1**, quali che siano i valori di verità che associamo a $p_1, p_2, \dots, p_n$, il nostro discorso è sicuramente vero. Se invece vi sono combinazioni di valori di verità che dànno il risultato **0**, occorre controllare se una situazione del genere si può verificare nel nostro contesto, poiché ciò significherebbe che il discorso non è corretto logicamente.

Una funzione di verità è dunque nient'altro che una funzione che ha per argomenti certe combinazioni di valori di verità, cioè certe successioni finite dei simboli **0** e **1**, e che prende i suoi valori nell'insieme {**0**, **1**} che ha per elementi i soli simboli **0** e **1** che sono i valori di verità. La logica si presenta dunque a questo punto sotto la veste della teoria delle funzioni finitarie di un insieme con due elementi in se stesso! Infatti, abbiamo scelto i simboli **0** e **1** arbitrariamente: quindi non ha nessuna importanza che si parli dell'insieme {**0**, **1**} o di un qualunque altro insieme, purché abbia esattamente due elementi. Diciamo che si tratta di funzioni *finitarie*, poiché supponiamo ragionevolmente che i nostri discorsi abbiano una lunghezza finita, e ciò implica che solo un numero finito di enunciati atomici intervengono in essi. Un discorso determinerà in particolare una funzione *binaria*, se due sono gli enunciati atomici che vi compaiono; un discorso che consiste di un solo enunciato atomico o di una sola negazione di un enunciato atomico, o nel quale compare comunque un solo enunciato atomico, come per esempio il « discorso »: « Piove e piove o non piove » determina una funzione *unaria*; analogamente diciamo che la funzione di verità di un discorso è *ternaria* se intervengono tre enunciati atomici e cosí via.

Occupiamoci ora del problema al quale si accennava poco fa: sono i connettivi finora studiati sufficienti per trascrivere *ogni* discorso nella maniera sopra descritta? In altre parole, possiamo rappresentare ogni funzione di verità, cioè ogni funzione finitaria da un insieme con due elementi in se stesso, come composizione delle funzioni associate ai connettivi finora incontrati? L'equivalenza delle due domande è una conseguenza del principio di vero-funzionalità: se la verità o falsità di un discorso dipende solo dai valori di verità degli enunciati atomici, e non dal significato di questi, saper descrivere la struttura logica di ogni discorso è la stessa cosa che conoscere ogni funzione di verità.

Vediamo dunque intanto quante sono le funzioni *unarie* da un insieme con due elementi in se stesso: il loro elenco è presto fatto, poiché ne esistono esattamente quattro che si possono descrivere cosí:

Tav. 9 - *Le quattro funzioni di verità unarie*

	f_1	f_2	f_3	f_4
1	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**

Conosciamo già f_3: non è altro che la funzione associata alla negazione. Ma conosciamo anche f_2: è questa la funzione di verità associata ad ogni discorso che consiste in un solo enunciato atomico, poiché allora il valore di verità dell'intero « discorso » coincide con il valore di verità della sua unica componente.

Può sembrare che f_1 e f_4 sono funzioni molto banali: quale che sia il valore di verità dell'unico enunciato atomico che compare nel discorso, il discorso cui si associa f_1 è sempre vero, mentre il discorso cui si associa f_4 è sempre falso! Vedremo che questi discorsi sono invece estremamente importanti.

Se A è un enunciato, un discorso che ha f_1 come funzione di verità è per esempio A o non-A, infatti se A è vero, non-A è falso e se A è falso, non-A è vero, almeno uno dei membri della disgiunzione è sempre vero, dunque la funzione di verità di A o non-A è proprio la f_1. Ciò significa che nella nostra logica vale il principio del *terzo escluso*: non può essere che né A né non-A siano veri. Un altro esempio di « discorso » con f_1 come funzione di verità è questo: non-non-A se e solo se A: *la doppia negazione equivale all'affermazione.*

Vediamo ora un discorso che ha f_4 come funzione di verità: sia di nuovo A un qualunque enunciato atomico, è facile vedere che ad « A e non-A » va associata la f_4. Questo significa che nella nostra logica vale il principio della *non-contraddizione*: la contraddizione per eccellenza, l'affermazione contemporanea di un enunciato e della sua negazione, non è mai vera.

Oltre a scoprire che questi princípi logici sono validi nella nostra logica, abbiamo cosí visto che sappiamo descrivere tutte le quattro funzioni di verità unarie con i mezzi di cui disponiamo.

Proseguiamo! Quante sono le funzioni binarie da un insieme con due elementi in se stesso? Sono 16: il lettore verificherà facilmente che esistono 2^{2^n} funzioni di verità n-arie; per $n = 4$ dovremmo già studiare 65.536 tali funzioni! Fortunatamente, un risultato della teoria delle funzioni di verità stabilisce che, in un certo senso, le abbiamo già tutte studiate: ogni funzione di verità, quale che sia il numero dei suoi argomenti, si può ottenere componendo la negazione con la congiunzione; o piuttosto le funzioni di verità ad esse associate. Vediamo come si può ottenere questo risultato, almeno per il caso delle funzioni di verità binarie. Dietro questo risultato tecnico si nascondono infatti tante leggi logiche [14].

[14] Cfr. per es. Quine [4], cap. 1, 2.

Ecco la tavola di tutte le funzioni di verità binarie:

TAV. 10 - *Le sedici funzioni di verità binarie*

		g_1	$\vee$	$\leftarrow$	g_4	$\rightarrow$	g_6	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\mid$	$\dot{\vee}$	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

Abbiamo riportato il simbolo a suo tempo introdotto per i connettivi che già conosciamo sulla colonna che riassume la corrispondente funzione di verità. Abbiamo invece indicato con g_1, g_4,..., g_{16} le funzioni corrispondenti a connettivi finora non discussi. Il simbolo sulla terza colonna richiede forse qualche spiegazione: mentre nella quinta colonna si trova la funzione di verità associata ad un enunciato del tipo $A \rightarrow B$, la terza colonna viene associata ad un enunciato del tipo $B \rightarrow A$, come è facile verificare. Cominciamo la nostra opera di riduzione: vediamo che, delle sedici funzioni, quelle che compaiono nelle ultime otto colonne possono esprimersi mediante quelle che compaiono nelle prime otto colonne piú la negazione. Prendiamo per esempio la nona colonna, associata al simbolo $\mid$, cioè all'« o » della incompatibilità: essa si può ottenere a partire dalla ottava colonna scambiando tutti i simboli, cioè scrivendo **0** dov'era un **1**, e **1** dove era **0**. Ora, questo modo di scambiare i simboli equivale a comporre la funzione originale con la negazione (per esattezza si dovrebbe dire « con la funzione associata alla negazione »), poiché questa fa appunto corrispondere **1** a **0** e viceversa. Quel che sembra un gioco formale traduce un fatto degno di interesse: l'incompatibilità equivale alla negazione della congiunzione. Nello stesso modo si verifica che la negazione dell'equivalenza logica è l'« o » esclusivo cioè « non-(A se e solo se B) » equivale a « A o B, ma non entrambi », in simboli: $\neg(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A \dot{\vee} B$.

Rimane da vedere come le prime otto funzioni si possono esprimere mediante la sola negazione e la congiunzione. Non entriamo nei dettagli di questa discussione — il lettore volenteroso potrà del resto verificarlo mediante il calcolo. Facciamo soltanto notare che

a) l'equivalenza logica si ottiene componendo l'implicazione con la congiunzione; ciò non è sorprendente, se ci ricordiamo che l'equivalenza logica si esprime nel connettivo « se... e solo se »; per questa ragione la si chiama anche *doppia implicazione,* e il simbolo $\leftrightarrow$ rende bene quest'idea. Precisamente, si ha che

$$A \leftrightarrow B \text{ equivale a } (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

b) a sua volta, l'implicazione viene ricondotta alla congiunzione e alla negazione in questo modo: $A \rightarrow B$ equivale a $\neg(A \wedge \neg B)$, che corrisponde all'espressione « non A senza B »; infatti, l'implicazione è vera se e solo se non ha un antecedente (A) vero mentre il conseguente (B) è falso. Illustriamolo con un esempio: « Se Paolo è in casa, allora la luce è accesa » è vero se e solo se lo è l'enunciato: « Paolo non è in casa senza che la luce sia accesa ».

c) la riduzione della disgiunzione alla congiunzione e la negazione avviene mediante le cosidette *leggi di De Morgan* secondo le quali si ha:

$$A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$
$$\text{e } A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B),$$

quali che siano gli enunciati A e B.

Sia detto per inciso che il numero dei connettivi « primitivi » può essere ulteriormente ridotto: l'« o » della incompatibilità da solo è sufficiente per esprimere tutti gli altri connettivi [15]. Si vede dunque che vi è una certa arbitrarietà

[15] | si chiama l'*operatore di Sheffer*: per ulteriori dettagli cfr. Quine [4].

nella scelta dei connettivi primitivi: avremmo anche potuto esprimere la congiunzione mediante la disgiunzione e la negazione grazie alla seconda legge di De Morgan e avremmo cosí ottenuto un sistema dove $\neg$ e $\vee$ sono primitivi. Invece di esprimere gli otto connettivi la cui funzione di verità è riportata nella metà destra della tavola 10 come la negazione dei primi otto, avremmo potuto scegliere la strada inversa: esprimere gli ultimi come la negazione degli altri. È chiaro che un sistema molto ridotto di connettivi rende la scrittura degli altri molto complicata, mentre in un sistema molto ricco non si intravedono piú i rapporti che sussistono tra i vari connettivi. Facciamo un paragone con i caratteri della scrittura: un sistema come quello cinese, dove ogni parola viene espressa mediante un simbolo proprio è altrettanto difficile da manipolare come quello binario che si usa nei cervelli elettronici, dove ogni parola viene immagazzinata come una successione di « bit », cioè le informazioni sono scritte nella lingua che conosce solo due parole: « sí» e « no ».

Sceglieremo un sistema particolarmente vicino alla lingua parlata in modo che la traduzione del discorso in un complesso simbolico e viceversa possa avvenire abbastanza agevolmente; descriveremo una lingua artificiale con cinque connettivi: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ed una infinità di enunciati atomici nel prossimo capitolo. Ma, prima di coronare in questo modo il nostro lavoro di formalizzazione, esercitiamoci brevemente a valutare le espressioni di quel linguaggio.

Abbiamo già visto che i discorsi che determinano una funzione di verità che prende costantemente il valore **1** hanno una caratteristica molto interessante: possiamo sostituire gli enunciati atomici che vi compaiono con altri enunciati in modo arbitrario; risulterà sempre un discorso vero. Questi discorsi sono dunque veri grazie alla loro *struttura logica*. Per questa ragione, lo schema di un discorso siffatto si chiama *legge logica* o *tautologia.* Ne abbiamo già incontrato degli esempi: il principio del terzo escluso, la non-contraddizione, l'equivalenza tra affermazione e doppia negazione. La ricerca di altri esempi sarà un utile campo di esercitazione per il calcolo delle funzioni di verità.

Ci proponiamo per prima cosa di dimostrare che le *leggi di De Morgan* sono tautologie. Scriviamoli allora nella seguente forma:

(M1): $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$,

(M2): $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

Con l'adozione di lettere latine minuscole invece che maiuscole come abbiamo fatto precedentemente vogliamo sottolineare il fatto che analizziamo uno *schema* di discorso, e non un discorso particolare. Chiamiamo perciò le lettere p, q, r ..., p_1, p_2, ... *variabili enunciative*.

Per la valutazione di queste espressioni utilizzeremo ora la seguente tecnica:

— per prima cosa isoliamo tutte le variabili enunciative che compaiono in una espressione data e facciamo l'elenco di tutte le combinazioni di valori di verità delle variabili cosí isolate; con due variabili avremo 4 combinazioni: **11**, **10**, **01**, **00**, con tre variabili ve ne sono 8, **111**, **110**, **101**, **100**, **011**, **010**, **001**, **000**; in genere, vi saranno 2^n combinazioni in presenza di n variabile enunciative;

— prepariamo allora una tavola: a sinistra scriviamo le variabili enunciative, a destra l'espressione da valutare; sotto l'elenco delle variabili portiamo l'elenco delle varie combinazioni di valori di verità. Per M1 avremo cosí la seguente tavola:

p	q	$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
1	**1**	
1	**0**	
0	**1**	
0	**0**	

— procediamo poi *dall'interno delle parentesi all'esterno*; nell'esempio valutiamo cioè prima $p \wedge q$, poi $\neg p$, $\neg q$ e la loro disgiunzione, poi la negazione del secondo membro e infine l'intera equivalenza. Conveniamo di riportare il risultato delle successive valutazioni *sotto il connettivo* in questione. In questo modo, i valori che assume complessivamente la funzione vengono a trovarsi nella colonna *sotto il connettivo principale*[16]. La tavola per M1 verrà dunque cosí riempita (mettiamo dei numeri sotto le colonne via via riempite che indicano l'ordine nel quale procediamo):

p	q	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\neg($	$\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
1	**1**	**1**	$\boxed{\mathbf{1}}$	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	$\boxed{\mathbf{1}}$	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	$\boxed{\mathbf{1}}$	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	$\boxed{\mathbf{1}}$	**0**	**1**	**1**	**1**
		1	6	5	2	4	3

Come si vede, sotto il connettivo principale, in questo caso $\leftrightarrow$, abbiamo una colonna composta esclusivamente di **1**; M1 è dunque una tautologia.

Nello stesso modo si dimostra che anche M2 è una tautologia:

p	q	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$\neg($	$\neg p$	$\wedge$	$\neg q)$
1	**1**	**1**	$\boxed{\mathbf{1}}$	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	$\boxed{\mathbf{1}}$	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	$\boxed{\mathbf{1}}$	**1**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	$\boxed{\mathbf{1}}$	**0**	**1**	**1**	**1**

Assieme alla legge della doppia negazione, le leggi di De Morgan sono il fondamento della tecnica del negare. Vedremo

[16] Intendiamo per connettivo principale di un'espressione quel connettivo che determina complessivamente l'espressione, in (M1) e (M2) è per es. $\leftrightarrow$; è facile riconoscere che ogni « schema di discorso » avrà complessivamente una delle forme $\neg P$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$, o $P \leftrightarrow Q$, per cui il connettivo principale è sempre ben determinato.

ora altre quattro leggi logiche che giustificano i vari modi della dimostrazione indiretta [17]; il lettore non avrà difficoltà a costatare che si tratta effettivamente di tautologie, la verifica sarà un utile esercizio che raccomandiamo caldamente.

p	q	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

(contrapposizione)

p	q	$(p \to q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to \neg p]$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	q	$(p \to q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to q]$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	q	r	$(p \to q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to (r \wedge \neg r)]$
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

17 Per *tecnica dimostrativa* è da intendere per ora semplicemente il metodo specifico che adopera il matematico per stabilire il valore di verità di un enunciato. Piú tardi discuteremo il concetto di dimostrazione sotto un altro aspetto. Poiché tutte le quattro leggi qui riportate sono equivalenze, il valore di verità del membro destro coincide col valore di verità del membro sinistro; se si ha dunque $P \leftrightarrow Q$, « dimostrare » P è equivalente a « dimostrare » Q.

Queste ultime tre leggi corrispondono tutte alla seguente tecnica di dimostrazione: si suppone che l'ipotesi $p \to q$ sia falsa, che si abbia cioè antecedente vero e conseguente falso: $p \wedge \neg q$; quest'ipotesi si conduce poi *ad absurdum*; nel primo caso si deduce $\neg p$, nel secondo si deduce q, entrambi in contraddizione con l'ipotesi $p \wedge \neg q$; nel terzo caso si deduce una qualunque contraddizione $r \wedge \neg r$, in aritmetica si prenderà per esempio l'enunciato « $\mathbf{1}=\mathbf{1}$ » per r e si deduce « $\mathbf{1} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{1} \neq \mathbf{1}$ ».

Stabiliamo infine un'ultima tautologia che spiega perché basta una sola contraddizione per far crollare un intero edificio deduttivo [18].

p	q	$(p \wedge \neg p) \to q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Menzioniamo ancora una legge molto importante sulla quale torneremo piú tardi:

p	q	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

18 Questa legge significa: se esiste *una sola* contraddizione in un sistema S, allora *ogni* enunciato si può dedurre in S; il sistema non distingue dunque tra il vero e il falso: tutto si può dedurre e dunque niente. Anche qui vale però l'avvertenza fatta alla nota 17: abbiamo identificato « Q si può dedurre da P » con « $P \to Q$ è una tautologia »: questa identificazione richiede qualche precauzione.

Questa è la legge del *modus ponens* (da distinguere dalla regola del *modus ponens* che discuteremo nel prossimo capitolo). Il termine di tautologia sembra particolarmente adatto per questa legge; a parole dice infatti che, se p implica q e se si ha p, allora q! Ma una legge logica non può che essere tautologica, altrimenti non sarebbe logica! Citiamo ancora Wittgenstein: « La tautologia lascia alla realtà tutto lo spazio — infinito — della logica; la contraddizione riempie tutto lo spazio logico e non lascia nessun punto alla realtà. Nessuna delle due può quindi determinare la realtà in alcun modo » [19].

3. *La logica degli enunciati come sistema formale. Linguaggio, semantica, sintassi*

Senza discutere il concetto di sistema formale in tutta generalità, discutiamo direttamente il sistema formale della logica degli enunciati. La sua prima componente consiste in un linguaggio artificiale che chiameremo **LE**.

a) L'*alfabeto* di **LE** consiste dei seguenti simboli:

$$p, \mid, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,).$$

(Qui e altrove non includiamo tra i simboli di un linguaggio — perché sempre eliminabili — gli altri tipi di parentesi, che pure useremo regolarmente.)

b) *espressioni* di **LE** sono:

— le *variabili enunciative*, ovvero tutte quelle « parole » di **LE** che hanno per prima « lettera » p e che proseguono un numero finito di sbarre $\mid$. Conveniamo di abbreviare con p_n la variabile enunciativa nella quale p è seguito da n sbarre.

— Se P è un'espressione di **LE**, lo è anche $\neg P$; se P e Q sono espressioni di **LE**, lo sono anche $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \rightarrow Q)$ e $(P \leftrightarrow Q)$.

Sono dunque espressioni di **LE** [20] tutti e solo quei complessi simbolici che sono o variabili enunciative o che sono costruite a partire da queste combinandoli con i connettivi e le parentesi secondo lo schema indicato sopra, $(p_1 \vee p_2)$, p_3 e quindi anche $[(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3]$, sono dunque espressioni di **LE**, mentre $p_1 \vee) \rightarrow p_2$ non lo è.

Le espressioni di **LE** corrispondono dunque a tutte le trascrizioni di discorsi ragionevoli, dove cioè i connettivi stanno al giusto posto rispetto agli enunciati che vengono collegati, e dove la punteggiatura evidenzia chiaramente quali enunciati sono da raggruppare in modo che sappiamo dove dobbiamo mettere le parentesi nel nostro linguaggio artificiale.

La descrizione di **LE** potrà sembrare molto pedantesca: munita di tali istruzioni, perfino una macchina sarà in grado non solo di scrivere un elenco lungo a piacere di « schemi di discorsi ragionevoli » ma anche di decidere, dato un qualunque complesso simbolico, se questo è o non è scritto con i caratteri di **LE**, e se questo è o non è un'espressione di **LE**. Ma questo non è affatto un inconveniente, anzi, questa è una delle fondamentali caratteristiche di un linguaggio artificiale che va sotto il nome di *effettività* o *decidibilità*. Si dice che un insieme è decidibile, se è possibile, in un numero *finito* di passi, decidere se un qualunque oggetto dato appartiene all'insieme o no. L'alfabeto e l'insieme delle espressioni di **LE** sono dunque decidibili, il linguaggio **LE** è effettivo.

L'effettività di **LE** ci garantisce che possiamo dominare bene questo linguaggio: supponiamo per esempio di voler dimostrare che tutte le espressioni di **LE** godono di una determinata proprietà P. Possiamo allora fare una dimostrazione per *induzione sulla lunghezza delle espressioni*. Cioè dimostriamo che una data espressione E di **LE** gode di P, non appena ne godono tutte le espressioni piú corte di E. Sappiamo infatti che E — o è una variabile enunciativa p_n e dobbiamo dunque dimostrare che P vale per p e che, se vale per p_m, allora vale anche per p_{m+1}, per ogni m; — altrimenti E è del tipo $(P \vee Q)$, $(P \wedge Q)$; $(P \rightarrow Q)$ o $(P \leftrightarrow Q)$ o $\neg P$, dove P e Q sono certamente piú corte di E. Sarà dunque sufficiente

[19] Cfr. L. Wittgenstein, *op. cit.*, 4.463.

[20] A volte invece di *espressione*, si dice anche *formula ben formata* di **LE**.

dimostrare che, se P e Q godono di *P*, allora ne godono anche tutte le espressioni or ora elencate. La dimostrazione sarà così completa. Sarebbe difficile fare dimostrazioni del genere per tutte le espressioni italiane...

Il prossimo passo nella descrizione di un sistema formale consiste nella caratterizzazione di quelle espressioni del linguaggio che sono *valide* nel sistema (le cosiddette *leggi*). Nel precedente paragrafo abbiamo già trovato un metodo per isolare espressioni siffatte mediante il calcolo della funzione di verità associata: avevamo identificate le leggi logiche con le tautologie, ovvero con le espressioni **LE** la cui funzione di verità era costantemente **1**. Cerchiamo ora di descrivere questo metodo nelle sue linee essenziali in modo da comprendere perché si dice che questo è un metodo *semantico* per distinguere le espressioni valide dalle altre.

Per semantica si intende di solito lo studio del rapporto tra i segni e quello che significano. Un tale studio presuppone dunque che si sappia come i segni vengono interpretati. Chiaramente, per il nostro linguaggio **LE** abbiamo in mente una ben determinata interpretazione: i discorsi. Le variabili enunciative dovrebbero quindi essere interpretate come enunciati atomici, ed i simboli $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, con le espressioni linguistiche corrispondenti, infine le parentesi saranno interpretate come opportuni segni di punteggiatura o raggruppamenti delle componenti del discorso. Ma poiché, allo scopo di stabilire se un discorso è logicamente corretto o no è sufficiente stabilire se la funzione di verità ad essa associata prende il valore **1** o no, non è necessario interpretare le variabili enunciative con enunciati atomici: sarà sufficiente associare loro dei valori di verità. Una *interpretazione h* di **LE** è quindi una corrispondenza che associa ad ogni variabile enunciativa p_n un elemento dell'insieme $\mathbf{V}=\{\mathbf{1},\ \mathbf{0}\}$ dei valori di verità. Diciamo che un'interpretazione *h* di **LE** è un *modello* di una espressione *E* di **LE**, se la funzione di verità associata ad *E* prende il valore **1** quando viene applicata a quella combinazione di valori di verità che la *h* associa alle variabili che compaiono in *E* [21]. Diciamo anche che allora la *h soddisfa E* e che *E* è *soddisfacibile*. Per esempio, l'espressione

$$[p_1 \vee (p_{17} \wedge p_{70})]$$

è soddisfacibile perché l'interpretazione *h* che associa **1** a p_1, **0** a p_{17} e **1** a p_{70} e **0** a tutte le altre variabili enunciative, ne è un modello. Per sapere se un'espressione è soddisfatta da una determinata interpretazione è dunque sufficiente conoscere l'interpretazione delle variabili enunciative che vi compaiono effettivamente. Diciamo infine che un'espressione *E* di **LE** è *semanticamente valida, se ogni interpretazione di* **LE** *ne è un modello*. Si vede facilmente che questo concetto di validità, che si può applicare ad un qualunque linguaggio una volta che si è specificato come sono da interpretare i simboli del suo alfabeto, coincide, nel caso di **LE**, esattamente con il concetto di tautologia: un'espressione per la quale ogni interpretazione è un modello, è un'espressione tale che, comunque si associno valori di verità alle variabili enunciative che vi compaiono, la funzione di verità ad essa associata assume sempre il valore **1**.

Il concetto di validità che adopera il matematico è però di un altro tipo: un enunciato matematico è valido se riusciamo a dimostrarlo. Il matematico che sostiene per esempio il teorema di Pitagora: « se *a, b, c* sono i lati di un triangolo, allora $a^2+b^2=c^2$, non va a vedere se in ogni triangolo abbiamo effettivamente questo rapporto (questo sarebbe il metodo semantico, a^2, b^2, c^2, vengono *interpretati* come le superfici dei quadrati dei lati, questi come certi segmenti misurabili di determinate figure disegnate, il simbolo + sarebbe interpretato come la somma di queste superfici, ecc.); il matematico stabilisce questo rapporto invece partendo da poche ipotesi, gli *assiomi* e alcune *definizioni*, mediante una catena di deduzioni. Non si ha nessun riferimento a triangoli tangibili. Che cos'è una *deduzione*? Schematicamente possiamo

21 Anche i connettivi vengono dunque interpretati, e precisamente con le funzioni descritte nelle rispettive tavole di verità: *tutti* i simboli del linguaggio e tutte le espressioni di **LE** ricevono pertanto un'interpretazione (su ciò, cfr. la fine del capitolo seguente).

descriverla come una successione di proposizioni ognuna delle quali è o un assioma, o deriva dagli assiomi applicando una regola logica. Diciamo che un'espressione matematica è un teorema, se esiste una dimostrazione per essa, ovvero una catena deduttiva nella quale essa figura come ultimo anello.

L'applicazione di una regola logica può venir descritta come la trasformazione puramente meccanica di un complesso simbolico in un altro. Un metodo, che permette di stabilire se un'espressione di un determinato linguaggio è valida in funzione di simili regole di trasformazione di certi complessi simbolici in altri, viene detto *sintattico*. La sintassi di un linguaggio naturale studia i rapporti che sussistono tra le parole del linguaggio e in particolare l'ordine delle parole e delle proposizioni all'interno di una frase. La sintassi di un linguaggio artificiale consiste di una serie di criteri che permettono, con la sola ispezione della configurazione dei simboli di una data espressione, di stabilire se un'espressione è valida o no. La sintassi consiste in genere di un elenco di espressioni valide — gli *assiomi* del sistema — e di un elenco di *regole* che ci dicono quali sono le operazioni che, se effettuate su espressioni valide, conducono ad altre espressioni valide. Una *dimostrazione* sarà dunque una successione di espressioni del linguaggio, ognuna delle quali è stata ottenuta dagli assiomi mediante l'applicazione puramente meccanica di una delle regole sintattiche, e si dice che un'espressione è sintatticamente valida o che è un *teorema,* se esiste una dimostrazione nella quale compare come ultima espressione.

Ovviamente è desiderabile che i concetti di *validità semantica* e *validità sintattica* coincidano. Un modo che condurrebbe sicuramente a questo scopo sarebbe quello di includere tra gli assiomi ogni espressione semanticamente valida e di non dare alcuna regola. Questa maniera di procedere non sarebbe però di una grande utilità: i sistemi assiomatici si costruiscono appunto per evitare che si debba verificare se ogni interpretazione è un modello. Si scelgono perciò poche espressioni che sono effettivamente valide semanticamente,

cioè « vere » in ogni interpretazione del linguaggio, e si fa affidamento sulla logica perché garantisca che le regole sintattiche conducano solo ad espressioni valide. Nel caso della logica degli enunciati siamo in una di quelle rarissime situazioni privilegiate nelle quali disponiamo di uno strumento semantico che si applica con facilità ed efficacia. Nella maggior parte delle teorie scientifiche, la situazione è invece molto piú complessa: intanto, il dominio di interpretazione è in genere molto piú vasto che non nel nostro caso, dove abbiamo un insieme con solo due elementi. Già nell'aritmetica dobbiamo interpretare le formule sull'insieme infinito dei numeri naturali! Ancora piú difficile si presenta la verifica semantica in fisica, dove lo stesso procedimento della verifica su un singolo elemento del dominio di interpretazione è pressoché impossibile: si pensi al margine di imprecisione intrinseco in ogni misura sperimentale. Il metodo assiomatico, ovvero la scelta di pochi princípi iniziali a partire dai quali si deducono gli altri teoremi si impone dunque generalmente, mentre nel caso della logica degli enunciati è per cosí dire un « lusso » superfluo in linea di principio. Tuttavia, per il ruolo fondamentale che assume la logica degli enunciati rispetto alle teorie formalizzate, esporremo brevemente in che cosa consiste il suo apparato sintattico.

La scelta delle espressioni valide iniziali è abbastanza arbitraria; esse saranno ovviamente prese nell'insieme delle tautologie. Se ne sceglierà un numero piú o meno grande, l'essenziale è che sia possibile dedurre da queste tutte le altre tautologie. Queste deduzioni saranno tanto piú facili quanto è grande il numero degli assiomi. Concentriamo dunque il nostro interesse sulle *regole di derivazione*. È sorprendente che siano sufficienti due regole di derivazione per dedurre tutte le tautologie da sole quattro tautologie iniziali. Queste sono:

a) la *regola di sostituzione* che dice che, se un'espressione E di **LE** è derivabile, lo è anche ogni espressione che si ottiene da E sostituendo una delle variabili enunciative che compaiono in E (in ogni sua occorrenza) con una qualunque espressione Q di **LE**. Scriviamo $E(p_n/Q)$ per l'espressione ottenuta da E sostituendo alla variabile p_n l'espressione Q. Possiamo scrivere allora così:

$$\text{(S)} \qquad \frac{\vdash E}{\vdash E\ (p_n/Q).}$$

Il simbolo $\vdash$ sta a indicare che l'espressione che lo segue è derivabile [22]. Dobbiamo verificare che (S) conduce solo da tautologie a tautologie: se E è una tautologia, ciò vuol dire, comunque si interpretino le variabili enunciative che in essa compaiono, quindi in particolare, comunque si interpreti p_n, la funzione di verità ad essa associata prende sempre il valore **1**. *Dopo* la sostituzione di Q a p_n, si ottiene un'altra espressione, chiamiamola E'; data un'interpretazione **1**, la funzione di verità associata a E' si calcola calcolando prima la funzione di verità associata a Q per l'argomento indicato da **1**, e calcolando poi la funzione di verità associata a E per l'argomento che è quello indicato da **1** meno che nella componente p_n, alla quale è da sostituire il risultato della valutazione di Q. Ma essendo E una tautologia, si otterrà ancora **1** come risultato, quale che sia **1**. Ogni interpretazione di E' è dunque un modello: E' è una tautologia.

b) la *regola del modus ponens* che dice:

se P e Q sono espressioni di **LE** tali che sia P che $P \rightarrow Q$ sono derivabili, allora anche Q è derivabile. In simboli:

$$\text{(MP):} \qquad \frac{\vdash P,\ \vdash P \rightarrow Q}{\vdash Q.}$$

[22] Questo simbolo non appartiene all'alfabeto di **LE**, bensí al *metalinguaggio* di **LE**: cosí si chiama il linguaggio col quale **LE** viene descritto, nel nostro caso l'italiano arricchito di alcuni simboli. Non possiamo entrare qui in una discussione approfondita di questo importante concetto. Rimandiamo il lettore desideroso di saperne di piú alla bibliografia che potrà trovare alla fine del prossimo capitolo.

Giustifichiamo anche questa regola facendo vedere che conduce solo da tautologie a tautologie: se sia P che $P \rightarrow Q$ sono tautologie, ciò significa che ogni interpretazione è un modello di entrambi. Può esistere una interpretazione che non soddisfa invece Q? Se cosí fosse, questa interpretazione non soddisferebbe neanche $P \rightarrow Q$, poiché, per ipotesi soddisfa P e, essendo un'implicazione con antecedente vero e conseguente falso, falsa, se non soddisfa Q, non soddisfa dunque $P \rightarrow Q$ contrariamente all'ipotesi che $P \rightarrow Q$ fosse una tautologia.

Per completare la descrizione dell'apparato sintattico della logica degli enunciati dobbiamo ancora precisare quali sono gli assiomi. Gli elenchi di assiomi della nostra logica sono numerosi quasi quanto lo sono gli studiosi di logica! Abbiamo già spiegato che un sistema molto ricco facilita la derivazione; un altro criterio può essere invece quello di non includere un assioma che possa essere derivato dagli altri, di elaborare cioè un sistema di assiomi *indipendenti*. Non pensiamo che sia molto utile annoiare il lettore con un tale sistema, tanto piú che, perché ciò sia veramente ragionevole, si dovrebbe poi anche far vedere che quest'elenco è completo, che cioè *ogni* tautologia è derivabile, lavoro che è in genere assai faticoso.

Per illustrare il carattere puramente meccanico col quale avviene l'applicazione delle regole di derivazione, ci sembra tuttavia opportuno concludere questo capitolo dando un esempio di dimostrazione. Supponiamo che queste tre espressioni siano derivabili:

(1) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$,
(2) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$,
(3) $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ [23].

Applicando la regola (S) a (2), sostituendo p a q, si ottiene

(4) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$.

Applicando (S) a (1), sostituendo p a r, si ottiene

(5) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow p)]$.

[23] Seguiamo qui l'esposizione di Quine [4], capp. 1, 13.

Applichiamo ancora (S) a (5), sostituendo $(\neg p \rightarrow p)$ a q:

$$(6) \quad [p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)] \rightarrow \{[\neg p \rightarrow p) \rightarrow p] \rightarrow (p \rightarrow p)\}.$$

Applichiamo ora MP a (4) e (6), ottenendo:

$$(7) \quad [(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p] \rightarrow (p \rightarrow p);$$

un'altra applicazione di MP a (3) e (7) dà:

$$(8) \quad p \rightarrow p.$$

La successione (1) — (8) è dunque una dimostrazione di $p \rightarrow p$ se includiamo (1) — (3) tra gli assiomi.

Certamente, la tentazione di includere allora anche (8) tra gli assiomi per risparmiarci questa lunga dimostrazione di una tautologia cosí evidente è grande. È tuttavia un risultato di grande interesse *teorico* che *esistano* sistemi completi di assiomi. (1) — (3) è uno di essi, messo a punto dal grande logico polacco Lukasiewicz. Questo significa infatti che è possibile elaborare una sintassi di **LE** in modo che i due concetti di validità semantica e validità sintattica coincidano, che tautologie e teoremi di **LE** siano la stessa cosa.

Roberto Cordeschi e Roberto Levi

Predicati: un'introduzione elementare

1. *Enunciati e sillogismi*

Come si è visto nel capitolo precedente, la logica enunciativa studia gli enunciati prescindendo dalla loro *struttura interna*. In tal senso, essa ha una capacità espressiva assai modesta: esistono cioè delle inferenze semplicissime che il linguaggio comune riconosce come valide, ma che la logica enunciativa non è in grado di esprimere sotto forma di leggi logiche.

Il lettore avrà sicuramente presente il classico sillogismo in *barbara* della tradizione aristotelica, che possiamo scrivere nella forma dello schema seguente:

(*)	ogni x è y,	(*premessa maggiore*)
	e ogni y è z	(*premessa minore*)
	quindi, ogni x è z	(*conclusione*)

(qui il simbolo a sinistra della parola « è » rappresenta il *soggetto*, e quello a destra il *predicato* nel senso del linguaggio comune).

Ora, volendo formalizzare in qualche modo tale sillogismo nello spirito dell'unica logica a noi fin qui nota (quella degli enunciati), non potremo far altro che scriverlo sotto forma di un'inferenza di una proposizione (la conclusione, che indicheremo con r) da due altre proposizioni (le premesse, che indicheremo rispettivamente con p e q). Avremo allora

$$(**) \qquad (p \wedge q) \rightarrow r.$$

Il lettore può verificare da sé che tale inferenza *non è una legge logica* nel senso della logica enunciativa (cioè non è un'inferenza « sempre vera »). Eppure, lo schema sillogistico (*) esprime un'inferenza *valida* nel senso del linguaggio comune (cioè un'inferenza che il linguaggio comune è disposto ad accettare come « sempre vera » in senso intuitivo).

Tale imbarazzante dissenso tra la « logica » del linguaggio comune e la logica enunciativa è però facilmente spiegabile, quando si ricordi che la logica enunciativa studia solo le relazioni tra le proposizioni, per cui la verità di una proposizione che esprima un'inferenza del tipo (**) è, semplicemente, come sappiamo, funzione della verità delle proposizioni componenti. Queste rappresentano gli « atomi » del nostro discorso, cioè le nostre piú piccole « entità logiche ». È evidente, d'altra parte, che la validità dell'inferenza sillogistica espressa dallo schema (*) può essere stabilita non semplicemente, in base alle relazioni esistenti tra le diverse proposizioni (componenti cioè le premesse e la conclusione), ma in base alle relazioni esistenti tra i *termini* (cioè i soggetti e i predicati) che occorrono in tali proposizioni. In questo caso, le proposizioni componenti non rappresentano piú una sorta di « atomi » linguistici, ma sono delle entità complesse, che è possibile scomporre al fine di analizzare le relazioni esistenti tra i termini di una stessa proposizione e/o tra i termini di proposizioni diverse.

In effetti, è noto che la validità dell'inferenza espressa dallo schema (*), oltre che sulla particolare funzione della parola « ogni » (su cui torneremo), si basa sulla presenza del cosiddetto « termine medio » (nel nostro caso y), il quale compare in ambedue le proposizioni che figurano da premesse, una volta come predicato (premessa maggiore) e una volta come soggetto (premessa minore): esso costituisce il perno, per cosí dire, del ragionamento sillogistico. La validità della

nostra inferenza sillogistica si basa dunque essenzialmente su questa particolare *struttura interna* delle premesse; è solo l'analisi di tale struttura che rende trasparente il ruolo del termine medio, che invece sfugge alla logica enunciativa. In tal senso, come dicevamo, non possiamo piú considerare le proposizioni come le nostre uniche entità logiche: per denotare formalmente le nuove entità appena individuate (soggetti e predicati) abbiamo bisogno di nuovi insiemi di simboli, cioè, piú intuitivamente, di un linguaggio « piú ricco » o « piú espressivo », che superi la scheletricità di quello enunciativo.

Per rendere la cosa piú evidente, consideriamo un altro esempio, nella forma del sillogismo seguente: [1]

Ogni uomo è mortale,
e Socrate è uomo;

---

quindi, Socrate è mortale.

Per mettere in forma simbolica questi tre enunciati (le premesse e la conclusione) abbiamo intanto bisogno di tre nuovi insiemi di simboli:

(1) simboli di soggetti « generici » (per es.: « uomo »): $x, y, z, \ldots$ [2];

(2) simboli di soggetti particolari o individui (per es.: « Socrate »): $a, b, c, \ldots$ [3];

(3) simboli di predicati (per es.: « essere mortale »): $P, Q, R, \ldots$ [4].

[1] Tale sillogismo, sia detto per inciso, benché venga spesso passato per aristotelico, in realtà non compare mai nelle opere logiche di Aristotele, ma, per la presenza di un termine individuale, « Socrate », nella premessa minore, è tipico della tradizione postaristotelica, non meno di (*). Cfr. J. Lukasiewicz, *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic,* Oxford, Clarendon Press, 1957[2] (ne esiste una trad. it. parziale). Sulla formalizzazione dei diversi sillogismi, cfr. Quine [4].

[2] I *nomi comuni* della grammatica.

[3] I *nomi propri* della grammatica.

[4] Le *proprietà* della grammatica.

La distinzione tra soggetti generici e particolari è importante anche nel linguaggo comune, dove una cosa è parlare di un individuo *qualsiasi non determinato* di una certa classe o insieme [5] (l'« uomo x », il « numero x », ecc.), e una cosa diversa è parlare di un individuo *qualsiasi ma ben determinato* di quella stessa classe (l'« uomo Socrate », il « numero 3 », ecc.). La distinzione è poi quella, fondamentale in matematica, tra *variabile* e *costante*: per analogia chiameremo *variabili individuali* x, y, z,... e *costanti individuali* a, b, c,...

Per indicare allora che un x indeterminato o un determinato a di una certa classe godono della proprietà P, scriveremo rispettivamente le due espressioni

$$Px, \quad Pa.$$

Sia M la proprietà « essere mortale », e U la proprietà « essere uomo ». Allora:

Mx	sta per	« x è mortale »
Ua	sta per	« Socrate è uomo ».

Ma la prima premessa del nostro sillogismo non dice semplicemente « x è mortale », ma « ogni x è mortale », cioè la proprietà M si predica non solo di *un* uomo x qualsiasi, o di *qualche* uomo x qualsiasi, ma di *ogni* uomo x qualsiasi. Dobbiamo dunque ancora arricchire il nostro linguaggio per esprimere almeno questa nuova distinzione: quella tra una proprietà che si predica di *qualche* individuo (almeno uno) di una classe (e cioè di *una parte* di tale classe) e una proprietà

[5] Con i termini *classe* o *insieme* (equivalenti nel nostro contesto) vogliamo riferirci a *collezioni* qualsiasi di oggetti o individui. Questi ultimi prendono il nome di *elementi* dell'insieme dato (o della classe data). Denoteremo gli insiemi (o classi) con lettere maiuscole in neretto, **A**, **B**, **C**, ..., e scriveremo talvolta

$$x \in \mathbf{A}$$

per indicare che x è elemento dell'insieme **A** (o appartiene all'insieme **A**). Il simbolo $\in$ prende il nome di *simbolo di appartenenza*.

che si predica di *ogni* individuo di quella classe (cioè di *tutta* la classe).

Dovremo aggiungere allora al nostro alfabeto dei nuovi simboli, i quali denotino le due distinte operazioni che stabiliscono la *quantità* degli individui di una classe (*una parte* o *tutti*) dei quali si predica una certa proprietà. In simboli:

(4)	$(\exists x)$	sta per	« per *qualche* x »
	$(\forall x)$	sta per	« per *ogni* x ».

In riferimento alla natura di tali operazioni i due nuovi simboli prendono il nome di *quantificatori*, rispettivamente *esistenziale* e *universale*.

Anche in questo caso, l'introduzione di nuovi simboli ci permette di scrivere nuove espressioni. Avremo così, ad esempio, che:

$(\exists x)\ Ux$	sta per	« *qualche* x è uomo »
$(\forall x)\ Ux$	sta per	« *ogni* x è uomo »,

e così via [6].

Tra l'espressione, a suo tempo introdotta, Ux, e la nuova espressione $(\exists x)\ Ux$ [o $(\forall x)\ Ux$] c'è una differenza fondamentale, che riguarda la variabile individuale x. Su essa torneremo in seguito; per ora basterà osservare che una variabile che occorre in un'espressione priva del relativo quantificatore (come x in Ux) si dice *libera*, mentre una variabile che occorre in un'espressione preceduta dal relativo quantificatore [come x in $(\forall x)\ Ux$ o simili] si dice *vincolata*. Ad esempio nella espressione

$$(\forall x)\ (Px \rightarrow Qy),$$

x è vincolata e y è libera. Infine, si dice *chiusa* un'espressione in cui tutte le variabili occorrono vincolate.

[6] Le due ultime espressioni possono anche leggersi, rispettivamente, « per *qualche* x, (oppure: *esiste almeno un* x tale che) x ha la proprietà U », e « per *ogni* x, x ha la proprietà U ».

Siamo ora finalmente in grado di scrivere formalmente, nel nostro nuovo linguaggio, che chiameremo *linguaggio predicativo monadico* [7], il sillogismo da cui abbiamo preso le mosse.

I premessa: « ogni uomo è mortale »
$(\forall x)\ (Ux \rightarrow Mx)$ [8]

II premessa: « Socrate è uomo »
Ua

conclusione: « Socrate è mortale »
Ma.

In forma piú compatta, il nostro sillogismo potrà essere scritto in questi termini:

$$\frac{(\forall x)\ (Ux \rightarrow Mx) \qquad Ua}{Ma.}$$

Ovviamente, a rigore, nello schema precedente sono state applicate tacitamente alcune regole di deduzione, che possono essere facilmente rese esplicite. Una di queste è il *modus ponens,* già noto dallo studio degli enunciati. Dell'altra cercheremo di dare una giustificazione intuitiva. Per i nostri scopi, tale regola, detta « regola di particolarizzazione », può essere enunciata pressappoco cosí: « Se una proprietà vale per una *intera* classe di individui, allora vale, in particolare, per un *singolo* individuo di tale classe » [9]. È evidente che l'applicazione di una regola del genere è implicita nella nostra inferenza sillogistica: se l'« essere mortale » è una conseguenza dell'« essere uomo » per *tutti* gli individui, lo è *a fortiori* per un *singolo* individuo (Socrate). Il nostro « ragionamento sillogistico », nelle vesti di una deduzione completa, diventa quindi:

1) $(\forall x)\ (Ux \rightarrow Mx)$	— prima premessa
2) Ua	— seconda premessa
3) $Ua \rightarrow Ma$	— regola di particolarizzazione applicata a 1)
4) Ma	— conclusione per *modus ponens* applicato a 3) e 2).

2. *Il linguaggio predicativo*

L'analisi del nostro sillogismo ci ha portato ad una naturale estensione del linguaggio enunciativo. Come abbiamo già accennato, tale estensione prende il nome di *linguaggio predicativo monadico.* È il momento di chiarire meglio il significato di questa locuzione.

Chiameremo *predicato monadico* ciò che nel linguaggio comune si dice una *proprietà* (ad esempio, « essere mortale »). Il linguaggio predicativo monadico è dunque un linguaggio in grado di esprimere formalmente le proprietà. Esso costituisce, in sostanza, la base per una formalizzazione della sillogistica aristotelica classica [10]: aggiungendo ad esso le opportune regole di deduzione, otterremmo, come sappiamo, un *calcolo,* precisamente il *calcolo sillogistico,* o *calcolo dei predicati monadici.*

Come si sa dal linguaggio comune, le proprietà non sono gli unici predicati (e neppure i piú importanti). Nel linguaggio comune si esprimono, infatti, non solo *proprietà* di oggetti (come « Socrate è mortale »), ma anche *relazioni* tra oggetti (come « Socrate è il maestro di Platone »). Tali relazioni, come è immediatamente evidente, non possono essere formalizzate mediante il linguaggio predicativo monadico appena intro-

7 Il termine *monadico* risulterà chiaro tra breve.
8 Si noti che questa espressione è diversa da $(\forall x)Ux \rightarrow (\forall x)Mx$. La giustificazione è lasciata al lettore.
9 In generale, la regola deve tener conto di qualcosa di piú. Per una formulazione esatta, cfr. Mendelson [7], pp. 90-91.

10 Su ciò cfr. Novikov [6], pp. 124 sgg.

dotto. Non possiamo fermarci, dunque, allo studio del sillogismo: è necessario fare ancora un passo avanti.

Consideriamo la frase

« 0 è minore di x ».

Supponiamo che 0 sia il primo numero della serie dei naturali (cioè una costante individuale), e x un numero qualsiasi (cioè una variabile individuale, elemento generico dell'insieme dei naturali **N**). Tra 0 e x, ci dice la frase citata, esiste la *relazione* « essere minore di »: relazione che, possiamo aggiungere, è evidentemente soddisfatta da *ogni* numero x. Denotando la nostra relazione con N^2, potremo scrivere:

$$(\forall x)\ N^2\ (0, x)\ ^{11},$$

che può anche leggersi: « ogni numero naturale è maggiore di 0 », oppure, « 0 è il piú piccolo numero naturale », ecc.

Il nostro alfabeto viene cosí ad essere ulteriormente arricchito: oltre ai simboli di proprietà $P, Q, R,...$ (*predicati monadici*), disponiamo ora di simboli di relazioni tra *due* oggetti $P^2, Q^2, R^2,...$ (che chiameremo *predicati diadici*). Alle nostre espressioni si aggiungeranno allora espressioni del tipo

$$P^2\ (x, y),\ P^2\ (a, z),\ Q^2\ (a, b),$$

e cosí via.

È evidente, a questo punto, che il nostro linguaggio può essere ancora arricchito, considerando simboli di relazioni tra tre oggetti (come nella frase « Platone fece conoscere Socrate ad Aristotele »), con le relative espressioni, e tra quattro, cinque,..., n oggetti, con le relative espressioni. Risultato di questa ulteriore generalizzazione (del tutto giustificabile) sarà il *linguaggio predicativo n-adico*, che chiameremo senz'altro *linguaggio predicativo*.

[11] L'esponente del simbolo N^2 sta a indicare che la relazione considerata sussiste tra *due* oggetti.

Riassumendo allora i risultati fin qui raggiunti, possiamo elencare sistematicamente gli elementi del nuovo linguaggio di cui disponiamo.

Linguaggio predicativo **LP**

1. *Simboli.*

1.1. Simboli variabili:
1.1.1. Variabili enunciative: $p, q, r,...$
1.1.2. Variabili individuali: $x, y, z,...$
1.1.3. Variabili predicative: $P^n, Q^n, R^n...$ [12]
1.2. Simboli costanti:
1.2.1. Connettivi logici: $\neg$, $\vee$
1.2.2. Quantificatore: $\exists$ [13]
1.2.3. Simboli ausiliari: (,).

2. *Espressioni.*

2.1. Ogni variabile enunciativa è un'espressione.
2.2. Se P è una variabile predicativa n-adica, e $x, y, ..., z$ sono esattamente n variabili individuali, allora $P\ (x, y,..., z)$ è un'espressione.
2.3. Se **F** è **F'** sono due espressioni, allora anche $\neg$ **F**, **F** $\vee$ **F'**, $(\exists x)$ **F** sono espressioni.
2.4. Niente altro è un'espressione.

Il lettore osserverà come tutti i simboli e le espressioni del linguaggio enunciativo **LE** (cfr. il cap. precedente) facciano parte del linguaggio predicativo **LP**: ciò chiarisce in che senso quest'ultimo è un'*estensione* del primo. Si potrebbe mostrare (ma non lo faremo) che anche ogni regola e ogni

[12] In seguito, salvo in casi articolati, eviteremo di scrivere l'esponente.

[13] Non è necessario elencare tra i simboli costanti entrambi i quantificatori, perché, come vedremo, uno dei due può essere sempre introdotto per definizione a partire dall'altro e dal simbolo di negazione. D'altra parte, come sappiamo dallo studio degli enunciati, è sufficiente introdurre i due soli connettivi $\neg$, $\vee$, potendosi gli altri introdurre per definizione.

legge logica del calcolo degli enunciati è una regola e una legge logica del calcolo dei predicati. Il lettore noterà anche come dall'alfabeto siano stati eliminati i simboli di costanti individuali. Ciò non deve sembrare una restrizione. I simboli di costanti sono nomi di individui o oggetti specificati della classe delle cose di cui si parla (ad esempio, « Socrate » è il nome di Socrate, individuo ben determinato della classe degli uomini, « 0 » è il nome dello 0, individuo ben determinato della classe dei numeri, e cosí via).

Quella che abbiamo chiamato qui grossolanamente la « classe delle cose di cui si parla » (cioè di cui « si occupa » il linguaggio predicativo) costituisce ciò che a volte si chiama *l'universo di discorso*. È evidente allora che, a rigore, le costanti individuali (cioè, come si è chiarito, i *nomi* degli oggetti della classe-universo di discorso) *non* fanno parte del linguaggio, ma, secondo una classica distinzione cui si è fatto cenno nel capitolo precedente, del *metalinguaggio*: esse risultano « abbreviazioni metalinguistiche » che, di fatto, è sempre possibile eliminare dalle espressioni del linguaggio, « traducendo » queste ultime in espressioni in cui le costanti siano, per cosí dire, descritte con una metafora [14].

Ad esempio, consideriamo l'espressione già incontrata

$$(\forall x)\ N^2\ (0,\ x),$$

cioè « per ogni numero x, 0 è minore di x ». Volendo eliminare la costante 0, si potrà scrivere:

$$(\exists y)\ (\forall x)\ \{N^2\ (y,\ x) \wedge (\exists z)\ [N^2\ (z,\ x) \rightarrow z = y]\},$$

cioè «esiste un numero y, tale che, per ogni numero x, y è minore di x e, se esiste un numero z minore di x, allora z coincide con y ». Come si vede, in quest'ultima espressione, sia pure a prezzo di complicare un po' la scrittura, si è riusciti ad eliminare la costante 0 [15].

3. *La quantificazione*

Dalla discussione svolta nei paragrafi precedenti abbiamo già appreso alcune caratteristiche degli *operatori di quantificazione*, o brevemente *quantificatori*.

Consideriamo ora l'espressione

$$Mx,$$

che, come ormai sappiamo, si legge « x è mortale ». È evidente che tale espressione non può essere detta né vera né falsa finché non si dispone di qualche informazione sulla variabile x: in altri termini, se non sappiamo chi o che cosa rappresenti x, o come si dice, se non conosciamo il *valore* di x, non possiamo decidere sul valore di verità di tale espressione. Essa, pertanto, *non è un enunciato* [16]: potremo chiamarla *forma enunciativa*.

Il nostro problema si pone dunque in questi termini: come è possibile ottenere un enunciato a partire da una forma enunciativa?

Un primo modo per ottenere un enunciato da una forma enunciativa consiste nel sostituire alla variabile libera della forma enunciativa (che per semplicità abbiamo supposto monadica senza con ciò limitare la validità del discorso) una costante, che ne rappresenta il valore. Questa operazione

[14] In generale, in seguito non distingueremo piú gli *oggetti* (ad esempio, gli elementi della classe-universo di discorso) dai *nomi* che li denotano (ad esempio le costanti), cioè dai simboli metalinguistici corrispondenti (identificheremo quindi l'uomo Socrate con il nome « Socrate », il numero 0 con il nome o, come si dice, il *numerale* « 0 », e cosí via). Nel nostro contesto, questa identificazione non darà luogo a confusioni, e, anzi, semplificherà la scrittura. Per una discussione dettagliata sull'argomento, cfr Pasquinelli [7], pp. 37 sgg.

[15] A questo punto, la costruzione del *linguaggio* predicativo è completa. Non studieremo i predicati sotto forma di un *calcolo* (con i suoi assiomi e regole di deduzione), e di conseguenza rinunceremo alla descrizione del *sistema formale* predicativo. Essa risulterebbe a questo punto analoga, nelle linee essenziali, a quella svolta dettagliatamente nel capitolo precedente per gli enunciati, ma richiederebbe un buon numero di complicazioni tecniche che esulano dai limiti di queste pagine. Il lettore interessato può rivolgersi con profitto a uno dei manuali già citati. Utilissimo risulta, in tal senso, anche Mangione [5].

[16] Come si ricorderà, un *enunciato* è una formula di cui si può dire se è vera o falsa.

implica due fasi distinte: (1) la scelta di un universo di discorso, (2) la scelta, all'interno dell'universo di discorso, di un valore per la variabile. Supponiamo di considerare l'universo di discorso costituito da essere umani e numeri naturali (in linea di principio, naturalmente, niente impedisce di prendere in considerazione un insieme cosí eterogeneo). In questo modo, abbiamo fissato l'universo di discorso. All'interno di tale universo, scegliamo il valore di x: se tale valore è rappresentato da un uomo (ad esempio Socrate), avremo un enunciato vero, se è rappresentato da un numero naturale (ad esempio 0), avremo un enunciato falso. Otterremo cosí dalla forma enunciativa Mx *enunciati* del tipo

$$M(\text{Socrate}), \qquad M(0),$$

rispettivamente veri e falsi.

Un altro modo per ottenere un enunciato da una forma enunciativa consiste nel chiudere la forma enunciativa mediante quantificatori, in modo che nell'espressione risultante non compaiano piú variabili libere. Consideriamo ancora la forma enunciativa Mx, e chiudiamola con il quantificatore esistenziale. Otterremo

$$(\exists x)\ Mx,$$

che, nel caso del nostro universo, è un enunciato vero: infatti, *è vero* che nell'universo di discorso degli uomini e dei naturali « *qualche* individuo è mortale ». Chiudiamo ora Mx con il quantificatore universale. Otterremo

$$(\forall x)\ Mx,$$

un enunciato falso: infatti, *è falso* che nel nostro universo di discorso « *ogni* individuo è mortale ». Anche con questo procedimento riusciamo ad ottenere dunque enunciati da una forma enunciativa. E anche in questo caso sono implicite due fasi: (1) la scelta di un universo di discorso, (2) la chiusura mediante quantificatori.

Per riassumere e chiarire le relazioni tra i due procedimenti (sostituzione e quantificazione della variabile) facciamo

vedere come, data la forma enunciativa Mx, la verità e la falsità dell'enunciato risultante rispettivamente da sostituzione e quantificazione dipenda sempre da ambedue le fasi descritte. Se consideriamo l'universo degli uomini e dei naturali, nel caso di sostituzione abbiamo che l'enunciato M(Socrate) è *vero* e l'enunciato $M(0)$ è *falso*; nel caso di quantificazione, l'enunciato $(\exists x)\ Mx$ è *vero*, l'enunciato $(\forall x)\ Mx$ è *falso*. Se consideriamo l'universo di discorso comprendente i soli uomini, *qualsiasi* valore si sostituisca alla variabile in Mx dà luogo a un enunciato *vero*, e *qualsiasi* quantificatore si usi per chiudere la forma enunciativa, Mx, si ottiene un enunciato *vero* [infatti, sia $(\exists x)\ Mx$, sia $(\forall x)\ Mx$ risultano veri]. Viceversa, se consideriamo l'universo di discorso comprendente i soli naturali, *qualsiasi* valore si sostituisca alla variabile in Mx, dà luogo a un enunciato *falso*, e *qualsiasi* quantificatore si usi per chiudere la forma enunciativa, Mx, si ottiene un enunciato *falso*.

In conclusione, una volta stabilito l'universo di discorso, disponiamo di due modi per ottenere un enunciato da una forma enunciativa: o sostituiamo (di volta in volta) la variabile individuale con una costante, o quantifichiamo la variabile stessa chiudendo l'espressione.

Ma vediamo la cosa con maggiori dettagli. Consideriamo ancora l'enunciato

$$(\exists x)\ Mx,$$

e l'universo di discorso comprendente i soli uomini. Tale enunciato afferma che « *qualche* uomo è mortale », e pertanto è vero, come sappiamo, se esiste qualche valore di x (qualche elemento dell'universo, o individuo, a_1, a_2, ..., a_n — Socrate, Platone, ..., Aristotele) che soddisfa M. Piú precisamente, deve essere vero *qualche* enunciato (almeno uno, al piú tutti)

$$Ma_1,\ Ma_2,\ \ldots,\ Ma_n,$$

cioè (come il lettore ricorderà dallo studio degli enunciati) deve essere vero l'enunciato:

$$Ma_1 \lor Ma_2 \lor \ldots \lor Ma_n. \qquad (***)$$

Dunque, $(\exists x)\ Mx$ equivale a $Ma_1 \vee Ma_2 \vee \ldots \vee Ma_n$, cioè *un'espressione chiusa mediante quantificatore esistenziale equivale a una disgiunzione.*

Ora, se, come nel nostro caso, i valori di x sono uomini (Socrate, Platone,...), ogni enunciato componente la disgiunzione (***) è vero, perché, non solo « *qualche* uomo è mortale », ma « *ogni* uomo è mortale » Dunque, in particolare, è vero anche l'enunciato

$$(\forall x)\ Mx,$$

che afferma, questa volta, che *tutti* gli enunciati

$$Ma_1,\ Ma_2,\ \ldots,\ Ma_n$$

sono veri, e dunque è vera la loro congiunzione

$$Ma_1 \wedge Ma_2 \wedge \ldots \wedge Ma_n.$$

Dunque, $(\forall x)$ equivale a $Ma_1 \wedge Ma_2 \wedge \ldots \wedge Ma_n$, cioè *una espressione chiusa mediante quantificatore universale equivale a una congiunzione.*

D'altra parte, asserire che « *ogni* uomo è mortale », equivale ad asserire che « *non* esiste *qualche* uomo che *non* sia mortale ». In simboli

$$(\forall x)\ Mx \text{ equivale a } \neg\ (\exists x)\ \neg\ Mx, \qquad \text{(I)}$$

che rappresenta una prima interessante relazione tra i due quantificatori.

Una seconda relazione è la seguente:

$$(\exists x)\ Mx \text{ equivale a } \neg\ (\forall x)\ \neg\ Mx, \qquad \text{(II)}$$

cioè « *qualche* uomo è mortale » è la stessa cosa che « *non* è vero che *ogni* uomo *non* sia mortale » (piú plasticamente: in generale, l'affermazione di una *parte* equivale all'impossibilità della negazione del *tutto*).

Supponiamo ora di fare un'operazione un po' ardita: prendiamo gli elementi del nostro universo di discorso, gli uomini, e mescoliamoli con gli dei in un'unica classe-uni-

verso: le variabili $x, y, \ldots$ assumeranno ora tanto i valori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (Socrate, Platone, ..., Aristotele), quanto i valori $b_1, b_2 \ldots, b_m$ (Giove, Giunone, ..., Mercurio). Continuiamo ad applicare alle $x, y, \ldots$ sempre il predicato M, « essere mortale ».

Nel nostro nuovo universo, l'enunciato:

$$(\exists x)\ Mx$$

continua ad essere vero: *qualche* individuo x dell'universo è davvero mortale (esattamente tutti e soli gli individui-uomini). Infatti l'enunciato in questione equivale ora a una disgiunzione del tipo:

$$Ma_1 \vee Ma_2 \vee \ldots \vee Ma_n \vee Mb_1 \vee Mb_2 \vee \ldots \vee Mb_m,$$

che corrisponde, come sappiamo dalla logica enunciativa, a una disgiunzione di enunciati di cui *qualcuno* è vero e *qualcuno* è falso, e che pertanto è vera nel suo complesso. Tale disgiunzione afferma infatti l'esistenza di qualche individuo x per il quale *è vero* che « x è mortale ». Ma nel nostro universo esiste anche *qualche* individuo x per il quale *non è vero* che « x è mortale » (esattamente tutti e soli gli individui-dei). Scrivendo in simboli quest'ultima asserzione esistenziale, otteniamo:

$$(\exists x)\ \neg\ Mx.$$

Il lettore osserverà ora come asserire che « esiste *qualche* x che *non* è mortale » equivale ad asserire che « *non tutti* gli x sono mortali » (nel nostro « universo » gli dei esistono!), cioè:

$$(\exists x)\ \neg\ Mx \text{ equivale a } \neg\ (\forall x)\ Mx, \qquad \text{(III)}$$

un'altra interessante relazione tra i quantificatori.

Per tornare alla normalità, separiamo ora gli uomini dagli dei, e consideriamo questi ultimi, tutti e soli, nel loro « universo ». I valori di x saranno ora solo $b_1, b_2, \ldots, b_m$ (Giove, Giunone, ..., Mercurio). Conserviamo però ancora il predicato M, « essere mortale ». È evidente allora che, mentre continua a valere l'enunciato:

$$(\exists x) \neg Mx,$$

(è vero infatti che « esiste *qualche* x che *non* è mortale », visto che parliamo di dei, per i quali in particolare « *nessun* x è mortale »), l'enunciato:

$$(\exists x) Mx$$

questa volta è falso, essendo falsa la disgiunzione:

$$Mb_1 \vee Mb_2 \vee \ldots \vee Mb_m$$

(non esiste un dio mortale!).

Se è falso l'enunciato $(\exists x)\, Mx$, allora è vera la sua negazione:

$$\neg (\exists x) Mx$$

(un enunciato o è vero o è falso!). Essa afferma infatti che « *non* esiste *qualche* dio che sia mortale ».

Ma asserire $\neg (\exists x)\, Mx$ equivale ad asserire, come il lettore potrà immediatamente giustificare, l'enunciato:

$$(\forall x) \neg Mx,$$

cioè « *ogni* dio *non* è mortale ». Dunque:

$$\neg (\exists x) Mx \text{ equivale a } (\forall x) \neg Mx, \qquad \text{(IV)}$$

che esprime un'altra relazione tra i quantificatori.

Dalle equivalenze (I)-(IV) si ricavano le seguenti equivalenze generali:

$(\forall x) \ldots$	equivale	a	$\neg (\exists x) \neg \ldots$	(1)
$(\exists x) \ldots$	»	»	$\neg (\forall x) \neg \ldots$	(2)
$\neg (\forall x) \ldots$	»	»	$(\exists x) \neg \ldots$	(3)
$\neg (\exists x) \ldots$	»	»	$(\forall x) \neg \ldots$	(4)

Le (1)-(2), in particolare dimostrano come uno dei quantificatori può essere sempre introdotto « per definizione » mediante l'altro e il simbolo di negazione. *Uno dei due quantificatori, pertanto, può essere sempre eliminato dai simboli del nostro linguaggio.*

Le (3)-(4), se l'universo degli individui è finito, corrispondono invece alle *leggi di De Morgan*, già studiate per la logica degli enunciati. Infatti, $\neg (\forall x)\, Px$ equivale, come sappiamo, a $\neg (Pc_1 \wedge Pc_2 \wedge \ldots \wedge Pc_n)$, che, a sua volta, equivale a $\neg Pc_1 \vee \neg Pc_2 \vee \ldots \vee \neg Pc_n$. Quest'ultima espressione equivale a $(\exists x) \neg Px$.

Con analogo ragionamento, il lettore può giustificare la cosa per $\neg (\exists x)\, Px$.

4. *Verso una semantica logica*

Nei paragrafi precedenti abbiamo usato spesso le locuzioni « enunciato vero » e « enunciato falso », interpretando abitualmente i termini « vero » e « falso » nel senso intuitivo del linguaggio comune.

Riprendendo molti punti già toccati sia in questo capitolo che nel precedente, ci proponiamo ora di definire le nozioni di « verità » e « falsità » in modo piú rigoroso, riducendo (se non eliminando del tutto) lo spazio lasciato all'intuizione. A tale scopo, descriveremo come si passa da una semantica *intuitiva*, dove le nozioni di « verità » e « falsità » non sono rigorosamente definite con mezzi logico-formali, a una semantica *logica*, dove tali nozioni sono descritte senza far ricorso a ciò che il linguaggio comune intende per « vero » e « falso ». Con ciò avremo gettato un ponte, se non altro, verso la costruzione di una vera e propria semantica logica.

4.1. *La nozione di funzione.*

Importanza fondamentale avrà nel nostro discorso il concetto di *funzione*. Riteniamo utile, per il lettore non matematico, riassumerne le caratteristiche attraverso un esempio concreto (su cui il lettore con qualche conoscenza matematica potrà fare a meno di soffermarsi).

Supponiamo che **A** sia l'insieme delle città italiane, e **B** l'insieme delle città italiane capoluogo di regione. Immaginiamo di far corrispondere a ogni città italiana il rispettivo capoluogo di regione. Questa corrispondenza esprime, come si vede, una regola secondo cui ad *ogni* elemento di **A** si fa corrispondere un *unico* elemento di **B**. Se indichiamo con f tale regola o, come appunto si chiama, *funzione,* ne potremo descrivere il comportamento come segue:

f (Viterbo) = Roma
f (Roma) = Roma
f (Latina) = Roma
. . . .
f (Como) = Milano
f (Bergamo) = Milano
f (Milano) = Milano
. . . .
. . . .

Dall'esempio risulta chiaro quanto si è detto: la funzione f associa ad ogni elemento di **A** *un solo* elemento di **B**; si precisa questa caratteristica dicendo che la funzione è una corrispondenza *univoca.*

Per denotare una funzione useremo la seguente scrittura:

$$f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

Una variante equivalente di tale scrittura sarà per noi:

$$f \in \mathbf{B}^{\mathbf{A}},$$

dove, per definizione, $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ è l'insieme delle funzioni da **A** a **B**.

Dato un elemento a di **A**, si chiama *immagine* di a secondo f quell'elemento b di **B** che resta associato ad a mediante f. Scriveremo:

$$f\ (a) = b$$

per esprimere la corrispondenza stabilita da f tra a e b. Sussistendo l'uguaglianza $f\ (a) = b$, si suole identificare $f\ (a)$ con b, e si dice che $f\ (a)$ è l'immagine di a secondo f.

L'insieme **A** si chiama *dominio degli argomenti* di f, o semplicemente *dominio* di f, l'insieme **B** si chiama *dominio dei valori* di f, o semplicemente *codominio* di f (argomenti e valori sono quindi, rispettivamente, elementi degli insiemi **A** e **B**).

Nell'esempio considerato, *ogni* elemento di **B** è immagine di qualche elemento di **A**. Tuttavia, si deve considerare anche il caso in cui in **B** esistano elementi che *non* sono immagini di alcun elemento di **A**.

Consideriamo ad esempio l'insieme **A** di tutti gli esseri umani e l'insieme **B** di tutte le donne. Sia f la funzione che ad ogni elemento di **A** associa la rispettiva madre: dal momento che non tutte le donne sono madri, esiste qualche elemento di **B** che non è immagine di alcun elemento di **A**. L'insieme degli elementi di **B** che sono immagini di qualche (uno o piú d'uno) elemento di **A** si chiama *insieme immagine* di **A** secondo f, e si indica con:

$$f\ (\mathbf{A}).$$

Come abbiamo appena osservato, non sempre f (**A**) coincide con **B**: può coincidere con un sottoinsieme proprio di **B** [17]. Se f (**A**) non coincide con **B** (ma con un suo sottoinsieme proprio), si dice che f è una funzione da **A** *in* **B**, se invece f (**A**) coincide con **B**, allora si dice che f è una funzione da **A** *su* **B**. Si noti che, invece, f è sempre definita per *ogni* elemento del dominio, cioè è definita *su* tutto **A**.

4.2. *Simboli e significati.* Chiusa cosí la lunga digressione sul concetto di funzione, torniamo alla nostra semantica logica.

Intuitivamente, l'operazione semantica per eccellenza consiste nel « dare un significato ». Nel nostro caso, in particolare, si tratterà di « dare un significato » ai simboli del lin-

17 Un *sottoinsieme* **X** di **B** si dice *proprio* se ogni elemento di **X** è un elemento di **B**, e esiste qualche elemento di **B** che non è elemento di **X**.

guaggio, ad esempio a una variabile enunciativa o a una variabile individuale. Questa operazione di « attribuzione di un significato » può essere immaginata, anche se piuttosto grossolanamente, come consistente nel fissare una *corrispondenza* tra simboli (o certe successioni di simboli) del nostro linguaggio e oggetti « non linguistici », elementi di un insieme che chiameremo *universo di interpretazione,* la cui descrizione rigorosa daremo alla fine del paragrafo. Per ora, basterà dire che, ad esempio, alla variabile enunciativa p, faremo corrispondere il suo valore di verità, che ne rappresenta estensionalmente il significato (e come tale appartiene all'insieme-universo di interpretazione); alla variabile individuale x faremo corrispondere una costante, che ne rappresenta estensionalmente il significato (e come tale appartiene sempre all'insieme-universo di interpretazione).

Oggetti non linguistici sono dunque, come si vede, i *significati* degli elementi del linguaggio. In pratica, quanto stiamo facendo si precisa col porre una corrispondenza tra *simboli* dell'alfabeto di un linguaggio e loro *significati,* assumendo che, prima di aver stabilito tale corrispondenza, i simboli siano, come si dice, « privi di significato ». Porre questa corrispondenza simboli-significati si rivelerebbe in realtà un'operazione di una complessità disperante nel caso del linguaggio comune o « naturale », a causa della molteplicità di significati che possono essere assunti da uno stesso simbolo o da una stessa parola (o successione di simboli) [18]. Questo inconveniente non si pone invece per i linguaggi costruiti « artificialmente »: infatti, nei nostri linguaggi formali, è possibile far corrispondere ad ogni simbolo un solo significato, stabilendo cosí una corrispondenza *univoca* simboli-significati.

La nostra operazione dunque, riferita ai linguaggi artificiali, è possibile e sensata. Indicheremo nel seguito con h l'operazione che stabilisce la corrispondenza univoca tra gli

[18] Ad esempio, la parola « capo » assume significati di volta in volta diversi nelle frasi: « mettersi a capo di... », « avere il capo sulle spalle », « Capo Nord », ecc

elementi dell'insieme dei simboli [19] (o *argomenti* di h, considerata come una funzione) e gli elementi dell'insieme-universo di interpretazione (o *valori* di h).

Tutto il nostro procedimento, a questo punto, non è che il primo passo verso una descrizione piú rigorosa dell'operazione intuitiva di « dare un significato ».

4.3. *L'interpretazione.* Nel primo capitolo, descrivendo la semantica enunciativa, si è alluso implicitamente alla differenza tra significato *intensionale* e significato *estensionale* dei simboli considerati (variabili enunciative e connettivi logici), Scegliendo il punto di vista *estensionale*, convenimmo di identificare un enunciato con il suo *valore di verità*. Il significato di un enunciato non era il suo « contenuto », cioè « ciò che esso dice », ma la sua falsità o la sua verità, cioè **0** o **1**.

Per i predicati il nostro scopo è ora piú modesto. Non ci proponiamo di dare qui una descrizione completa della semantica del linguaggio predicativo **LP**, ma ci contenteremo di tracciare uno schizzo dell'interpretazione dell'*alfabeto* e delle *espressioni aperte* di tale linguaggio, restando su un piano puramente estensionale. Il lettore ha presente la tabella del linguaggio predicativo data a p. 81; ciò che ci proponiamo di fare è scrivere un'analoga tabella per i significati dei simboli, variabili e costanti, di tale linguaggio, e di presentare la tecnica di interpretazione delle espressioni aperte. Non interpreteremo le espressioni chiuse del nostro linguaggio, poiché ciò darebbe luogo ad alcune complicazioni, dovute alla presenza delle variabili quantificate [20].

Il primo insieme di simboli della nostra lista è quello delle *variabili enunciative,* la cui interpretazione è stata già illustrata nel capitolo precedente. Brevemente, pertanto, di-

[19] E, come vedremo, di quelle successioni di simboli che sono le espressioni.

[20] Per una descrizione completa della semantica logica del linguaggio predicativo, si rinvia in particolare ai citati volumi di Mangione e Pasquinelli. Maggiori difficoltà tecniche presenta l'esposizione di Casari [8].

remo che le variabili enunciative costituiscono l'insieme degli *argomenti* della nostra funzione interpretazione h, chiamiamolo **E**, ai quali essa fa corrispondere, come *valori*, uno dei due elementi dell'insieme $\mathbf{V} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Cioè, schematicamente:

$$h: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{V},$$

o, in una scrittura che sappiamo equivalente:

$$h(p) \in \mathbf{V},$$

che dice esplicitamente che il *valore* di una variabile enunciativa p nell'interpretazione h *appartiene* all'insieme dei valori di verità.

Quanto alle *variabili individuali*, abbiamo già accennato che il loro significato è dato dall'individuo o oggetto dell'insieme su cui esse variano; poiché tale insieme costituisce, come pure abbiamo detto, il nostro *universo di discorso* **U**, il significato di una variabile individuale x sarà l'oggetto corrispondente, secondo h, dell'universo. Indicando con **I** l'insieme delle variabili individuali, possiamo scrivere:

$$h: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{U},$$

o, equivalentemente:

$$h(x) \in \mathbf{U}.$$

Quest'ultima scrittura sta ad indicare semplicemente che h fa corrispondere a x un elemento dell'universo **U**, ad esempio a. Scritto per esteso, $h(x) = a \in \mathbf{U}$ (si ricordi la definizione di immagine di un elemento secondo una funzione data). Cioè, usando una terminologia ormai nota, a rappresenta il valore di x secondo h.

Piú complessa si presenta l'interpretazione delle *variabili predicative*. Cominciamo con le variabili predicative monadiche. Ancora una volta ci tornerà utile considerare l'universo di discorso i cui elementi sono gli uomini e gli dei, e la proprietà « essere mortale ». Indipendentemente da altre considerazioni, che ci porterebbero sul terreno dell'interpretazione

intensionale, possiamo usare la nostra proprietà per *separare* l'insieme degli uomini da quello degli dei: le già accennate considerazioni intuitive ci suggeriscono infatti che è « *falso* » attribuire la proprietà « essere mortale » agli dei, mentre è « *vero* » attribuirla agli uomini. Convenzionalmente, pertanto, stabiliamo di attribuire il valore di verità **0** all'enunciato che risulta dall'applicazione della proprietà in questione a un dio, e viceversa il valore di verità **1** all'enunciato che risulta dalla applicazione della stessa proprietà a un uomo. In breve, ciò si può riassumere scrivendo:

$$\text{« } x \text{ è mortale »} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } x \text{ è un dio} \\ \mathbf{1}, & \text{se } x \text{ è un uomo.} \end{cases}$$

Esemplificando:

« Socrate è mortale » = **1** « Giove è mortale » = **0**
« Platone è mortale » = **1** « Giunone è mortale » = **0**
. . . .

Dato lo stesso universo di discorso, è evidente che, usando una diversa proprietà (per esempio « essere di sesso maschile ») si avrà, in generale, una situazione diversa, cioè una diversa attribuzione dei valori di verità agli enunciati risultanti dall'applicazione della nuova proprietà agli stessi individui.

Dato quindi un universo di discorso **U** e una proprietà qualsiasi, si può dire che essa si comporta, estensionalmente, come una funzione, che prende il nome di *funzione caratteristica*, che « discrimina » gli oggetti di **U** in due insiemi: l'insieme degli oggetti che la soddisfano e quello degli oggetti che non la soddisfano. Una proprietà è dunque una funzione da **U** a **V**. Se l'interpretazione estensionale di una variabile enunciativa consisteva nell'attribuirle come significato il suo valore di verità, l'interpretazione estensionale di una variabile predicativa monadica consiste nell'attribuirle come significato la proprietà corrispondente, identificata con la funzione caratteristica. In altre parole, l'interpretazione h associa a una variabile predicativa P una funzione f_P che va dall'universo di discorso **U** all'insieme **V** dei valori di verità. In simboli:

$$h\colon \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{F},$$

dove con **P** abbiamo indicato l'insieme dei simboli di variabili predicative, e con **F** l'insieme delle funzioni da **U** a **V**, cioè del tipo:

$$f_P\colon \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}.$$

In altri termini:

$$h\,(P) \in \mathbf{V}^{\mathbf{U}}.$$

Quest'ultima scrittura rende evidente che il valore che la funzione h assume quando ha come argomento una variabile predicativa è un elemento dell'insieme delle funzioni dall'universo di discorso all'insieme dei valori di verità, cioè una funzione che ha per argomenti elementi di **U** e per valori elementi di **V**. È opportuno sottolineare che la funzione h porta simboli in significati, mentre la funzione f_P porta significati in altri significati.

È ora immediato ricavare, dall'interpretazione di una variabile predicativa e dall'interpretazione di una variabile individuale, l'interpretazione di una variabile predicativa *applicata* a una variabile individuale, cioè l'interpretazione di una espressione aperta della forma Px. Per esplicitare il meccanismo dell'interpretazione, esaminiamolo passo per passo: 1. Si interpreta P, ottenendo, come si è appena visto, $h\,(P) = f_P$. 2. Si interpreta $h\,(x)$, ottenendo, come sappiamo, $h\,(x) = a$. 3. Si interpreta $f_P\,(a)$ come **0** o come **1**, a seconda che a non soddisfa o soddisfa la proprietà f_P. Riepilogando:

$$h\,[P(x)] = [h\,(P)\,h\,(x)] = f_P\,(a) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } a \text{ non soddisfa } f_P, \\ \mathbf{1}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il nostro ragionamento può essere generalizzato al caso di predicati di più variabili. Ad esempio, consideriamo ancora una volta il predicato « essere minore di », denotato con N,

definito sull'insieme dei naturali **N** (il nostro universo di discorso). Al solito, l'interpretazione estensionale di N ci sarà data da:

$$h\,(N) = f_N,$$

dove f_N è quella funzione che porta le coppie *ordinate*[21] $\langle x, y\rangle$ (dove $x, y \in \mathbf{N}$) in **1** o in **0** a seconda che x sia o meno minore di y. È facile riconoscere in f_N la funzione caratteristica definita più sopra. Esemplificando, avremo:

$f_N\,(0,\ 1) = \mathbf{1}$
$f_N\,(1,\ 1) = \mathbf{0}$
$f_N\,(1,\ 2) = \mathbf{1}$
. . . .
$f_N\,(2,\ 1) = \mathbf{0}$
$f_N\,(2,\ 2) = \mathbf{0}$
$f_N\,(2,\ 3) = \mathbf{1}$
. . . .
. . . .

N					
4	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
3	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
2	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
	0	1	2	3	4 **N**

A fianco riportiamo anche una rappresentazione grafica del predicato considerato, mediante gli « assi cartesiani ». La lettura del diagramma è familiare a chiunque abbia qualche nozione di matematica elementare: sia l'asse delle ascisse che quello delle ordinate rappresentano la serie dei naturali **N**; a una coppia ordinata qualsiasi di naturali, il primo sull'asse delle ascisse, il secondo su quello delle ordinate, (ad esempio $\langle 3,\ 4\rangle$), corrisponde un unico elemento dell'insieme $\{\mathbf{0},\ \mathbf{1}\}$ (nel nostro caso, **1**: è infatti vero che « 3 è minore di 4 »).

Le coppie ordinate $\langle x, y\rangle$ (dove x, y sono naturali qualsiasi) si considerano elementi dell'insieme denotato con

[21] Una coppia $\langle x, y\rangle$ si dice ordinata $\langle x,\ y\rangle \neq \langle y,\ x\rangle$.

$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, che prende il nome di *prodotto cartesiano* (in analogia agli assi cartesiani). L'insieme di tutte le coppie di $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, che soddisfano N, costituisce, come ormai sappiamo, l'insieme degli *argomenti* di f_N che assumono valore **1** nella corrispondenza:

$$f_N: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{V},$$

donde, al solito (ponendo $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \mathbf{N}^2$):

$$h(N) \in \mathbf{V}^{\mathbf{N}^2}.$$

(Si noti che l'insieme di tutte le coppie che *soddisfano* N è un sottoinsieme *proprio* di $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.)

Il ragionamento, che abbiamo qui svolto nei dettagli per il predicato di una variabile (o monadico) M e per il predicato di due variabili (o diadico) N, può essere ovviamente generalizzato al caso di predicati di un numero qualsiasi di variabili n (o n-adici). In tal caso, un predicato del genere, che denoteremo con P^n, sarà descrivibile come una funzione:

$$f_{P^n}: \underbrace{\mathbf{U} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U} \times \ldots \times \mathbf{U}}_{n \text{ volte}} \rightarrow \mathbf{V}.$$

Concludendo, potremo dunque rappresentarci un predicato n-adico come una funzione i cui argomenti variano sull'universo di discorso (sono cioè n-uple di individui o oggetti di $\mathbf{U}^n$) e i cui valori sono o **0** o **1** (cioè o l'uno o l'altro elemento dell'insieme **V**). Indicando per brevità $\underbrace{\mathbf{U} \times \mathbf{U} \times \mathbf{U} \times \ldots \times \mathbf{U}}_{n \text{ volte}}$ con $\mathbf{U}^n$ e l'insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{U}^n$ a $\mathbf{V}$ con $\mathbf{V}^{\mathbf{U}^n}$, potremo scrivere:

$$h(P^n) \in \mathbf{V}^{\mathbf{U}^n},$$

cioè una variabile predicativa n-adica è, secondo h, un elemento dell'insieme delle funzioni da $\mathbf{U}^n$ a **V**.

Sulla base di quanto facemmo a proposito dei predicati monadici, sarà facile al lettore ricavare a questo punto l'interpretazione delle espressioni aperte risultanti dall'applicazione di un predicato n-adico a una n-pla di variabili individuali.

Con ciò abbiamo esaurito la descrizione della tabella dei significati dei *simboli variabili* del nostro alfabeto. Passiamo ora ai *simboli costanti*: connettivi e quantificatori.

Quanto ai *connettivi*, già sappiamo che il significato di un connettivo è in sostanza la sua tavola di verità: in questo caso h non fa che associare ad ogni connettivo la rispettiva tavola. Come è stato spiegato (cfr. il cap. precedente), tale tavola non è che la materializzazione di una ben precisa funzione, che abbiamo chiamato *funzione di verità*. Tale funzione, a sua volta, associa a un valore di verità o a una coppia di valori di verità (a seconda che si tratti di un connettivo monoargomentale o biargomentale) un determinato valore di verità. Interpretato secondo h, dunque, un connettivo è una funzione che assume argomenti nell'insieme **V**, o nell'insieme $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, e valori nell'insieme **V**. Tale funzione rappresenta dunque il *valore* della funzione-interpretazione h.

Per spiegare la cosa, consideriamo, ad esempio, il caso del connettivo $\neg$. Applicando h a $\neg$, si ottiene dunque una funzione, denotiamola con $f_\neg$, che al valore di verità **0** associa il valore di verità **1**, e viceversa. La funzione h, applicata a $\neg$, assume quindi il valore $f_\neg$, cioè, schematicamente:

$$h(\neg) = f_\neg.$$

A sua volta, $f_\neg$, applicata a **0** assume il valore **1**, e viceversa, cioè schematicamente:

$$f_\neg(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$$
$$f_\neg(\mathbf{1}) = \mathbf{0}.$$

La sostanziale differenza tra h e $f_\neg$ consiste, anche qui, nel fatto che h porta da simboli a significati, mentre $f_\neg$ porta da significati ad altri significati.

Concludendo, nella solita scrittura, avremo che:

$$h(\neg) \in \mathbf{V}^{\mathbf{V}},$$

dove è messo bene in luce come il valore di h, applicata a $\neg$, sia una funzione da **V** su **V**.

Vediamo ora come si effettua l'interpretazione della espressione che si ottiene dall'applicazione del connettivo $\neg$ a una variabile enunciativa p, cioè l'interpretazione di $\neg p$. Mediante la tecnica ormai nota, si percorre il cammino già illustrato: 1. Si interpreta p, cioè si applica a p la funzione h. Si ha: $h(p) = \mathbf{0}$, oppure $h(p) = \mathbf{1}$. 2. Si interpreta $\neg$, ottenendo, come si è appena visto: $h(\neg) = f_\neg$. 3. Si applica il valore di $h(\neg)$, cioè $f_\neg$, al valore di $h(p)$, cioè, o $\mathbf{0}$ o $\mathbf{1}$. Nel primo caso si ha $f_\neg(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$, nel secondo $f_\neg(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$. Riassumendo:

$$h(\neg p) = [h(\neg)\, h(p)] = \begin{cases} f_\neg(\mathbf{0}) = \mathbf{1} \\ f_\neg(\mathbf{1}) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Lasciamo al lettore l'interpretazione, secondo h, dei rimanenti connettivi. Come traccia, il lettore rifletta che, ad esempio, nel caso della disgiunzione, si avrà:

$$h(\vee) \in \mathbf{V}^{\mathbf{V}^2}.$$

(dove, naturalmente, $\mathbf{V}^2 = \mathbf{V} \times \mathbf{V} = \{<1, 1>, <1, 0>, <0, 1>, <0, 0>\}$). La tavola di verità della disgiunzione (la cui lettura, basata su un'analogia già chiarita, è immediata) sarà:

V		
1	**1**	**1**
0	**0**	**1**
	0	**1** V

Proseguendo nell'interpretazione del linguaggio predicativo **LP**, restano da considerare i suoi simboli piú caratteristici:

i due *quantificatori*. Anche per quel che riguarda i quantificatori il valore assunto dalla funzione interpretazione è una funzione. Brevemente, in simboli, avremo:

$$h(\forall) = f_\forall$$
$$h(\exists) = f_\exists.$$

Si tratta ora di vedere come agiscono rispettivamente $f_\forall$ e $f_\exists$. Abbiamo già mostrato come un'espressione quantificata corrisponda a una congiunzione o a una disgiunzione estese a tutto l'universo di discorso, a seconda che nell'espressione considerata compaia il quantificatore universale o il quantificatore esistenziale. Sappiamo inoltre dalle tavole di verità della congiunzione e della disgiunzione che una congiunzione assume il valore **1** se tutti gli enunciati che la compongono assumono il valore **1**, e soltanto in tal caso; mentre una disgiunzione assume il valore **0** se tutti gli enunciati che la compongono assumono il valore **0**, e soltanto in tal caso. Possiamo dunque interpretare i quantificatori come funzioni che a successioni di valori di verità associano uno dei due valori di verità, secondo le seguenti tabelle:

$h(\forall) = f_\forall$	$h(\exists) = f_\exists$
$f_\forall(\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}\}) = \mathbf{0}$	$f_\exists(\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}\}) = \mathbf{0}$
$f_\forall(\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}\}) = \mathbf{0}$	$f_\exists(\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}\}) = \mathbf{1}$
$f_\forall(\{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}\}) = \mathbf{1}$	$f_\exists(\{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}\}) = \mathbf{1}.$

Possiamo scrivere le due tabelle precedenti in modo piú compatto, convenendo di non considerare, nelle successioni che costituiscono gli argomenti di $f_\forall$ e di $f_\exists$, le eventuali ripetizioni di uno stesso elemento:

$f_\forall(\{\mathbf{0}\}) = \mathbf{0}$	$f_\exists(\{\mathbf{0}\}) = \mathbf{0}$
$f_\forall(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}) = \mathbf{0}$	$f_\exists(\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}) = \mathbf{1}$
$f_\forall(\{\mathbf{1}\}) = \mathbf{1}$	$f_\exists(\{\mathbf{1}\}) = \mathbf{1}.$

Infatti, per conoscere il valore di $f_\forall$ e di $f_\exists$, ci basta sapere se la successione che costituisce l'argomento della funzione considerata sia costituita da tutti **0**, o da tutti **1**, oppure da qualche **0** e qualche **1**. Non importa sapere *quanti* **0** e *quanti* **1** costituiscono la successione, poiché, come sappiamo, basta che *un solo* enunciato di una congiunzione sia falso perché tutta la congiunzione sia falsa, e analogamente basta che *un solo* enunciato di una disgiunzione sia vero perché tutta la disgiunzione sia vera. Nel caso poi che tutti gli enunciati siano veri, sia la loro congiunzione che la loro disgiunzione sono vere, e, viceversa, se tutti gli enunciati sono falsi, sono false sia la loro disgiunzione che la loro congiunzione.

Riepilogando, $f_\forall$ e $f_\exists$ sono funzioni i cui argomenti sono tutti e soli i sottoinsiemi non vuoti dell'insieme $\mathbf{V} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, e i cui valori sono elementi di **V** 22. In simboli:

$$h(\forall) = f_\forall \in \mathbf{V}^{\mathbf{W}}$$
$$h(\exists) = f_\exists \in \mathbf{V}^{\mathbf{W}}.$$

A questo punto, dovremmo passare all'interpretazione delle espressioni quantificate, ma, come abbiamo avvertito, ciò darebbe luogo a qualche complicazione che va oltre il carattere elementare di queste pagine.

Possiamo riepilogare i risultati di questo paragrafo in una tabella, come promesso al lettore a suo tempo.

Simboli	Significati
variabili enunciative	valori di verità (elementi di **V**)
variabili individuali	costanti (elementi di **U**)
variabili predicative *n*-adiche	funzioni *n*-adiche (elementi di $\mathbf{V}^{\mathbf{U}^n}$)
connettivi	funzioni di verità (elementi di **V** e $\mathbf{V}^{\mathbf{V}^2}$).
quantificatori	funzioni di quantificazione (elementi di $\mathbf{V}^{\mathbf{W}}$).

22 I sottoinsiemi *non vuoti* di **V** sono gli elementi dell'insieme $\mathbf{W} = \{ \{0\}, \{0, 1,\}, \{1\} \}$

Siamo ora in grado di descrivere l'*universo di interpretazione* del linguaggio predicativo (cfr. 4.2) come il *codominio* di *h* cioè l'unione degli insiemi **V**, **U**, $\mathbf{V}^{\mathbf{U}^n}$, $\mathbf{V}^{\mathbf{V}}$, $\mathbf{V}^{\mathbf{V}^2}$, $\mathbf{V}^{\mathbf{W}}$. Detto **H** l'universo di interpretazione si ha:

$$\mathbf{H} = \mathbf{V} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{V}^{\mathbf{U}^n} \cup \mathbf{V}^{\mathbf{V}} \cup \mathbf{V}^{\mathbf{V}^2} \cup \mathbf{V}^{\mathbf{W}}.$$

5. *Conclusione. Nota bibliografica*

Se qui *si conclude* la nostra esposizione, qui *comincia* la teoria logica dei predicati, con i suoi sviluppi e le sue applicazioni piú interessanti. Il taglio estremamente elementare che si è voluto dare a queste pagine ci impone a questo punto di rinviare al capitolo di C. Cellucci dedicato a *La logica come teoria della dimostrazione* il lettore desideroso di conoscere sviluppi tecnici e teorici piú elevati. La conoscenza di tali sviluppi, se richiede una maggiore applicazione da parte del lettore, è d'altronde indispensabile per superare la possibile sensazione che le tecniche sin qui esposte si riducano a un'elegante ma sterile riformulazione di problemi tradizionali.

Per un ampliamento, in questa direzione, dei propri studi logici, il lettore potrà tenere utilmente presenti alcuni dei molti trattati ormai esistenti in lingua o in traduzione italiana. Si tratta di volumi per lo piú citati nel corso di questi due primi capitoli, che elenchiamo qui di seguito sistematicamente in ordine di complessità crescente.

[1] E. Agazzi, *La logica simbolica*, Brescia, La Scuola, 1964.

[2] A. Pasquinelli, *Introduzione alla logica simbolica*, Torino, Boringhieri, 1963².

[3] J. Lemmon, *Elementi di logica*, Bari, Laterza, 1975.

[4] W. V. O. Quine, *Manuale di logica*, Milano, Feltrinelli, 1970⁴.

[5] C. Mangione, *Elementi di logica matematica*, Milano, Boringhieri, 1964.

[6] P. S. Novikov, *Elementi di logica matematica*, Roma, Editori Riuniti, 1975.

[7] E. Mendelson, *Introduzione alla logica matematica*, Torino, Boringhieri, 1972.

[8] E. Casari, *Lineamenti di logica matematica*, Milano, Feltrinelli, 1967⁴.

Infine, un'eccellente « guida » alla problematica logica contemporanea è rappresentata da

M. L. Dalla Chiara Scabia, *Logica*, Milano, Isedi, 1974.

Per una bibliografia piú estesa rimandiamo senz'altro ai testi citati nelle note bibliografiche dei due capitoli seguenti.

Paolo Freguglia

Per la storia della logica matematica: la formalizzazione

1. *Qualche preliminare*

Ci è sembrato opportuno cominciare questo nostro contributo precisando didatticamente il significato della stessa parola « logica » e chiarendo, quanto piú brevemente possibile, le esigenze che conducono ad una trattazione storico-genetica del problema proposto nel libro, cioè della *formalizzazione* e quindi di alcune interessanti parti della logica.

In questa esposizione si intenderà per *logica* lo studio delle *forme del corretto dedurre*, il cui primo esame troviamo negli *Analitici Primi* di Aristotele. Ci sono però altri modi di intendere la parola « logica » e si possono riassumere schematicamente in questi:

1. logica come generica *metodica* di indagine, come « arte del pensare » piuttosto che « arte del ragionare » (vedi la logica di Port Royal);

2. logica intesa come la kantiana logica trascendentale che si occupa delle condizioni a priori che rendono possibile una « conoscenza » obiettiva. Essa si può considerare quindi una parte della gnoseologia;

3. logica come metodologia delle scienze empiriche, sperimentali (vedi Stuart Mill);

4. logica come interpretazione razionale del reale (vedi Hegel e poi idealismo: logica della fisica logica dell'arte, ecc.).

Dunque la « logica » cui qui ci riferiamo è la logica delle forme corrette del ragionamento, la *logica formale*, appunto.

Chiarito ciò ci si pone subito il problema: quale senso ha fare la storia della logica *formale*.

Intanto vale la pena ricordare che autori della grandezza di Kant [1] e della fama di Prantl [2] sostennero la *astoricità* della logica, nel senso che tutto quello che si poteva sapere sulla logica formale era stato detto da Aristotele.

Ciò ci può sbalordire, ma in effetti tanto per Kant quanto per altri si trattava di veri e propri pregiudizi che nascevano in un ambiente senz'altro *poco entusiasta* per gli studi logico-formali. Ma anche quando questi studi ripresero interesse (seconda metà dell'800) si assistette sempre a pregiudizi nei confronti dello studio *storico* della logica: si ritenne infatti « cosa rudimentale » la logica precedente.

Accadde cosí che si scoprirono leggi logiche già sufficientemente note e studiate in special modo nel medioevo (si vedano gli studi di Bochenski [3]).

Perché, allora, fare storia della logica? Rimandando per una approfondita risposta per esempio a [4], ci limiteremo a rispondere che è utile l'indagine storica della logica in primo luogo perché questa:

1. ci consente una interpretazione consapevole dei vari risultati, dando alla *ricerca* una certa vivacità, in modo che i nuovi risultati abbiano un autentico significato scientifico, e non siano, come non di rado accade, artificiose erudizioni utili soltanto e forse ad esercitare la mente di chi le propone;

2. rappresenta l'approccio piú idoneo allo studio ed all'inquadramento degli studi logici; per cui opportunamente adeguata, è un eccellente strumento didattico;

3. contribuisce in modo essenziale alla formazione di una coscienza culturale-scientifica.

Sarà quindi opportuno indicare anche se assai di sfuggita i principali metodi, comuni d'altronde ad altri tipi di indagine

storica, di cui ci si deve servire nell'affrontare lo studio storico della logica:

1. *analisi filologica*: essa propone e risolve fra l'altro grossi problemi, quali ad esempio quello relativo alla possibilità di interpretare alla luce dei risultati odierni la logica aristotelica. L'analisi filologica ci consente cosí di stabilire in che modo resta salvo lo spirito, l'intendimento, l'efficacia della logica aristotelica;

2. *analisi ambientale*: essa ci consente di inquadrare, di inserire in un ambito culturale generale un certo risultato tecnico;

3. *analisi critica*: essa vuol mettere in luce l'efficacia, l'importanza di un certo risultato, confrontare risultati classici e risultati recenti, dando cosí indicazioni alla ricerca.

Anche per la storia della logica, conseguentemente ai metodi d'indagine or ora menzionati, si distingue un *aspetto interno* e un *aspetto esterno*. Questa distinzione corrisponde o meglio dipende da due diversi ma *interdipendenti* punti di vista: il primo legato principalmente all'analisi filologica, il secondo a quella ambientale. Ovviamente l'analisi critica, sotto diverse angolature, è compartecipe in ciascuno dei summenzionati aspetti e punti di vista. Vorremmo sottolineare l'interdipendenza di questi due aspetti, tenendo presente che ciascuno di essi, preso e sviluppato unilateralmente, rischia di perdere da un lato parte di significato culturale e dall'altro di valore scientifico.

C'è però un altro modo di intendere la storia della logica formale ed in fondo tutta la storia della scienza: scoprire e interpretare in modo originale e nuovo una teoria o un risultato classico, e quindi prendere le mosse per sviluppare e creare nuove tecniche e nuove teorie. Chiameremo questo metodo di indagine storica *attivo*. Numerosi sono, in campo logico, gli esempi di indagine attiva; basta citarne uno veramente notevole: la « sillogistica » (assertoria e modale) di Lućasiewicz [5].

Per comprendere meglio questa metodologia storiografica (ma un discorso impegnato in merito esorbita dai fini di questa nostra esposizione) di cui chi scrive è convinto fautore, varrà la pena tener presente che la storiografia scientifica non è e non ha come unico scopo la « ricostruzione del passato ». È certo questo un momento indispensabile, ma deve essere considerato soltanto il momento iniziale. Lo storico può veramente portare un valido contributo tecnico costruendo quello che si può chiamare il *fondamento storico* della disciplina o teoria in questione, parallelo o indipendente da quello che è il *fondamento attuale* di esse, legato allo stato attuale della ricerca.

Sempre a proposito di interdipendenza un discorso a sé va fatto per i rapporti che intercorrono fra storia della logica formale e storia della matematica in generale. Premesso che la storia della logica formale o piú precisamente della logica matematica dall'800 in poi è una notevolissima parte della storia della matematica, si può osservare che le relazioni reciproche fra matematica e logica nel loro sviluppo storico sono un fatto costante (vedi [6]): pensiero matematico e pensiero logico sono sempre intimamente legati da Euclide in poi. « Se matematica vuol dire dimostrare, matematica vuol dire applicare la logica. »

È poi davvero impensabile affrontare lo studio della *storia della matematica moderna*, in special modo per quel che riguarda l'ottocento ed il novecento, senza tener costantemente presente la logica.

Essa, infatti, è indispensabile non solo per affrontare problemi di fondamentalistica (anzi, la fondamentalistica stessa per taluni aspetti è logica), ma anche per affrontare problemi tecnici di natura algebrica (algebra di Boole; algebra universale; teoria dei modelli; teoria delle relazioni e teoria dei reticoli), di natura topologica, geometrica (geometria della logica) e analistica (analisi matematica della logica), in cui l'interdipendenza fra logica e matematica significa da un lato

fornire la logica di strumenti matematici e, dall'altro, perfezionare le tecniche di dimostrazione; in tutti questi casi non si può prescindere dall'analisi storica dei rapporti fra logica e matematica.

Infine, tenuto presente il nesso che sul piano puramente *epistemologico* lega logica e matematica, si può facilmente comprendere quanto sia indispensabile per la storia della matematica l'analisi critico-logico-formale di ogni risultato matematico.

Nelle pagine che seguono faremo vedere appunto come storico-geneticamente si giunge alla formalizzazione della geometria, dell'aritmetica e quindi della logica stessa.

Ci sembra infine opportuno rammentare che l'approfondimento dello studio storico della logica formale contribuisce non solo al superamento di pregiudizi di varia natura, ma anche e soprattutto al chiarimento del *significato* di questa scienza.

Tutto ciò è essenziale ed indispensabile per una obiettiva, profonda e sicura visione storica generale della cultura.

Cominciamo con alcune doverose e necessarie premesse.

2. *La « forma » nella logica antica e medioevale e prime considerazioni*

Ogni buon trattato di logica *scolastica o neoscolastica* afferma che « la logica è prima di tutto formale » e che come tale [1] ha in prima considerazione la *doctrina de recta forma* del ragionamento. Ma lo studio della logica formalmente intesa risale — come è noto — ad Aristotele per il quale il problema, filosoficamente posto, ha un risvolto che va ben piú in là delle mere esigenze di correttezza tecnica e metodologica nei riguardi del ragionamento. Con ciò si vuol dire che vengono coinvolti i rapporti fra logica e ontologia e

[1] Vedi [7], p. 118.

risolti in favore di « una perfetta corrispondenza fra forme del pensare e forme dell'essere » [2].

Forma e *Materia* sono caratteristiche della trattazione classica della logica. La prima riguarda la disposizione e la combinazione ai fini della conclusione, degli elementi del ragionamento (ad es. termini, enunciati). Per quanto riguarda gli enunciati si tratterà della loro composizione sintattica: soggetto, predicato, complementi. In modo un po' approssimativo potremmo dire invece che la *Materia* riguarda il significato, il contenuto dei soggetti, dei predicati e dei complementi e quindi dei legami che caratterizzano le conseguenze logiche [3].

Lo studio del sillogismo concepito come strumento logico formale [4] costituisce il punto di partenza per gli sviluppi e i progressi tecnici della logica e quindi del sempre maggiore interesse culturale e scientifico di questa disciplina. Questa nostra affermazione si riferisce special modo all'ottocento, periodo in cui fu affrontata in modo radicalmente nuovo, con l'ausilio della matematica, la sillogistica [5]. Con ciò non va certo sottovalutato il contributo creativo della scolastica (vedi [3]) la quale fu per un lunghissimo periodo l'erede del patrimonio logico-formale che le scuole aristotelica, stoica e megarica avevano costruito non solo in termini di sillogistica assertoria, ma anche di logica proposizionale enunciativa e di logica modale.

Per l'Antichità come per il Medio Evo lo studio della *forma logica* è dettato da esigenze di *rigore*. Il problema della rigorosità di un determinato procedimento logico, di un ragionamento a prescindere da contingenti considerazioni contenutistiche è a monte di ogni riflessione epistemologica ed in generale filosofica. Aristotele sente il bisogno di uno

2 Vedi [8], p. 328 e peculiarmente il testo aristotelico (*Metaph.* Δ 7, 1017 a 23 ss).

3 La distinzione Forma e Materia *assomiglia* molto alla moderna separazione fra Sintassi e Semantica.

4 Vedi, per una trattazione filologica classica della sillogistica aristotelica, gli studi di P. Cosenza [9], [10].

5 Vedi [11], [12]. Per una trattazione logico matematica moderna della sillogistica vedi [5], [13].

strumento « imparziale » allo stesso modo di Leibniz, di uno strumento tale che non solo in sé stesso sia massimamente rigoroso ma che valga da criterio per la stessa rigorosità.

La *forma* intesa come struttura dello strumento conoscitivo (ad es. del sillogismo) deve essere l'oggetto delle attenzioni del logico; essa è infatti al di sopra dei contenuti e per questo il suo studio non è altro che la ricerca dei metodi limitatamente alla rigorosità.

L'Antichità ci ha anche offerto la possibilità di riflettere e di indagare su due fra i piú significativi temi logico-formali: l'*indipendenza* e la *non-contraddittorietà* (o *coerenza*).

Euclide infatti sente e lascia in eredità il problema del suo V postulato. Problema che si esplicita in termini di indipendenza di quest'ultimo dagli altri quattro, cioè, in altre parole, di dimostrabilità o meno di esso. Ma ciò coinvolge anche altri quesiti che riguardano da un lato la natura, il senso delle *definizioni* (termini, ὅροι), dei *postulati* (αἰτήματα) e *delle nozioni comuni* (κοιναὶ ἔννοιαι) e dall'altro la non-contraddittorietà, cioè la impostazione epistemologicamente costruttiva degli *Elementi* e di eventuali sistemi geometrici diversi.

L'analisi storica della genesi delle soluzioni del problema del V postulato sarà poi la via maestra che condurrà alla acquisizione della mentalità formalistica.

Il metodo formale inteso sempre come ricerca di rigorosità tende per la sua natura anche all'automatismo, al calcolo. Infatti quanto meno spazio lasceremo alla congettura ed alle improvvisazioni quanto piú sicuri, precisi ed univoci saranno i nostri risultati. Da qui l'esigenza, rivelatasi chiaramente per la prima volta con Leibniz, di matematizzare la logica (cfr. il *calculemus* leibniziano) [6]. Ma in fondo anche il calcolo, l'algoritmo matematico è in sé stesso già un apparato formale.

L'avvento dell'algebra *simbolica* [7] consentirà la simboliz-

6 Vedi [14].

7 Ci si può rifare alla scuola di Cambridge, vedi *infra*.

zazione della logica, la trasformazione di questa in vero e proprio calcolo (vedi G. Boole).

Due aspetti dunque, almeno fin qui, devono essere acquisiti per la formalizzazione. Il primo è il distacco degli « strumenti logici » dall'oggetto contingente delle nostre considerazioni. Questa separazione è astrazione, cioè costruzione di schemi generali che a loro volta poi « verificheranno » varie situazioni contingenti. Il secondo è l'adozione di un linguaggio adeguato di natura ideografica ed universale come strumento espressivo che elimini ambiguità ed aspetti retorici.

In questo modo si realizza un primo passo essenziale al *rigore,* cioè la *chiarezza* espositiva. Il linguaggio simbolico infatti ha come primo scopo la realizzazione della inequivocità delle espressioni del ragionamento. Prima di esaminare la logica in quanto tale e la sua formalizzazione esamineremo come i metodi della formalizzazione si affermano nella geometria e nell'aritmetica.

3. *La formalizzazione della geometria*

Come già abbiamo accennato la geometria fu la prima scienza a prospettare problemi di natura assiomatica. Come è noto Euclide sviluppa le prime 28 proposizioni prescindendo dal V postulato [8], cioè arriva a dare il cosidetto teorema *diretto* delle parallele (I, 28 : $\alpha + \beta = \pi \Longrightarrow r // s$ [9]) senza far uso di questo postulato. Poiché però è necessario caratterizzare mediante un *criterio* la nozione di parallelismo, il Nostro *inverte* l'enunciato precedente (I, 29 : $r // s \Longrightarrow \alpha + \beta = \pi$). È a questo punto che deve utilizzare il V postulato. I matematici successivi e lo stesso Euclide [15] non accettarono supinamente questo postulato perché lo ritenevano poco *evidente* e, nella sua formulazione, troppo *complesso* per essere accettato come proposizione primitiva. Infatti tale è rispetto ai precedenti quattro postulati [10]. Questo « criterio di decidibilità » intorno ad una espressione affinché possa essere considerata o meno una proposizione primitiva, cioè un assioma, è tipico di tutte le teorie assiomatizzate in modo non formale. Tale è la geometria degli Elementi; infatti in questa, per quanto riguarda i *princìpi,* non c'è niente che sia e che possa essere autenticamente indipendente dal riferimento al contenuto geometrico-fisico ed alla conseguente evidenza.

Tutto questo non toglie che l'opera euclidea sia un notevole esempio di rigorosità.

Geometri greci, arabi e via di seguito si affannarono a dimostrare il V postulato ritenendo che esso *dipendesse* dagli altri quattro. Di fatto, quando non si imbatterono in errori, formularono proposizioni del tutto equivalenti. Tra queste ultime terremo presente (vedi appresso) quella affermante che

per un punto fuori di una retta è possibile tracciare una ed una sola parallela alla retta data.

A questo punto è da ricordare l'opera di G. Saccheri [11] (vedi [15]).

Questo erudito gesuita per dimostrare la dipendenza del V postulato procede per assurdo: supponendo il postulato in questione indipendente cerca contraddizioni nelle prime 28 proposizioni del I Libro. Come è noto i risultati ottenuti, da lui creduti soddisfacenti, di fatto non lo furono perché coinvolgono condizioni non certo meno *deboli* del V postulato.

Cosí con Legendre (1752-1833) si arriverà a formulare quei famosi teoremi sulla somma degli angoli interni di un triangolo che fanno a meno del V postulato [15]. Si giunge dunque ai Bolyai (padre e figlio) a Schweikart (1780-1857), a Gauss (1777-1855) e quindi a Lobačevskij (1793-1855),

[8] Il V postulato di Euclide dice: « E che se una retta, incontrandone (altre) due, forma gli angoli interni dalla stessa parte (coniugati interni) minori di due retti (la cui somma sia minore di due retti), le due rette prolungate all'infinito si incontrino, da quella parte in cui gli angoli siano minori di due retti ».

[9] Essendo α e β angoli coniugati interni.

[10] Vedi [15], p. 97.

[11] Di questo autore è pregevole la *Logica demonstrativa* (*La logica dimostrativa*) oltre l'*Euclides ab omni noevo vindicatus* (*Euclide emendato da ogni difetto*) (1733).

cioè a quella serie di ricerche e studi che portarono alla impostazione ed alla realizzazione vera e propria di una prima geometria non-euclidea basata su una negazione del V postulato. Si tratta della cosiddetta geometria iperbolica in cui al posto del postulato euclideo delle parallele si prende il seguente:

Coppie di rette intersecate da una terza retta se formano con quest'ultima angoli coniugati interni la cui somma è minore di 180° allora non si incontrano.

Poco piú tardi B. Riemann (1826-1868) portando ulteriori e grandiose generalizzazioni contemplò anche la possibilità di un'altra geometria non-euclidea, quella ellittica, basata sul postulato seguente:

Due rette complanari hanno sempre un punto in comune

che è un'altra negazione del V postulato euclideo. Ma anche tutto questo è legato ad una raffinata *evidenza* che nasce da alcune intuizioni fisiche. Infatti la negazione del V postulato nel caso iperbolico era legata a supposizioni fisico-astronomiche (triangolazioni astronomiche ecc.)[12], mentre quella ellittica era suggerita da completezze sistematiche di calcolo.

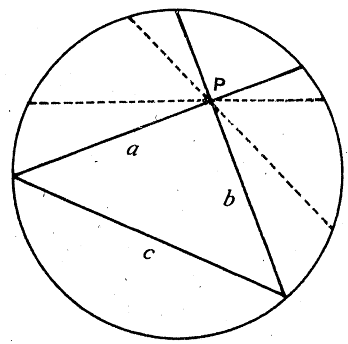
Intanto però un passo avanti per la formalizzazione era stato segnato: si era constatata sul piano dei tentativi la impossibilità della dimostrazione di dipendenza del V postulato euclideo dagli altri quattro, si erano quindi costruite geometrie non-euclidee (iperbolica ed ellittica), si era sviluppata la geometria assoluta (Gauss, Bolyai) cioè quella geometria che prescinde non solo dal V postulato, ma anche da ogni sua negazione.

A questo punto si prospetta un interessante problema: bisogna dimostrare effettivamente sul piano teorico la indipendenza del V postulato, visto che ormai non sembrava piú tanto possibile la dimostrazione della sua dipendenza dagli altri quattro.

[12] Gauss e Lobačevskij fecero esperienze in tal senso.

Il problema logicamente si imposta e si risolve nel seguente modo. Si deve ammettere come non-contraddittoria per ipotesi la geometria euclidea (compreso il V postulato) dal momento che questa si è mostrata tale in duemila anni di sviluppi ed applicazioni. Se si riesce a dimostrare non contraddittoria anche la geometria non-euclidea (ad es. iperbolica) in cui si *nega* il V postulato allora avremmo dimostrato che tale postulato è *indipendente* dagli altri quattro perché appunto esso sussiste *coerentemente* con gli altri sia come è, sia negato. Per realizzare quanto sopra, cioè per dimostrare la non-contraddittorietà della geometria non-euclidea (ad es. iperbolica) basterà rifarci a qualcosa di sicuramente coerente; ciò si attuerà rimandando tutto alla geometria euclidea la quale, come si è supposto prima, è ritenuta non-contraddittoria a priori. Si dovrà costruire cioè un *modello* euclideo della geometria non-euclidea considerata.

Ciò fu realizzato per primo dall'italiano Beltrami (1868) [16]. Altro modello che per la sua elementarità riporteremo, fu ideato da F. Klein. Esso consiste in quanto segue: si rappresenta il piano lobačevskijano all'interno di una conica (ad es. circonferenza, ellisse, vedi figura), cioè i punti *propri* del piano sono i punti interni alla conica. Si escludono i punti di « frontiera » (i punti cioè che sono in effetti punti *impropri*, cioè *direzioni*). Le *rette* sono rappresentate dalle *corde* della conica esclusi gli estremi. Si stabiliscono quindi altre convenzioni rappresentative di modo che tutta la geometria piana di Lobačevskij viene modellata.



In questo modello è facile *dimostrare* [13] la negazione iperbolica del V postulato, o, che è lo stesso, la negazione di quella proposizione ad esso equivalente relativa all'unicità della retta parallela condotta per un punto esterno ad una retta data. Infatti se si considera un punto P (proprio) e si conducono per esso due corde (rette) *a* e *b* esse sono *parallele* con la corda (retta) *c*, non incontrandola mai, dal momento che i punti di frontiera non appartengono propriamente alle corde. Ma anche tutte le corde (rette) « divergenti » (nella figura due di esse sono tratteggiate) sono, secondo la definizione euclidea di parallelismo (Termine 23), parallele a *c*. Dunque la negazione del V postulato non è in contraddizione coi primi quattro postulati, il che significa appunto che lo stesso V postulato non può dedursi dagli altri, cioè è indipendente.

Pur essendo sempre nel contesto euclideo, punto, retta e piano assumono un significato *convenzionale* nella costruzione del modello. Ciò costituisce un « trampolino di lancio » per la formalizzazione [14]. Chi dette di punto, retta e piano una definitiva concezione formale fu D. Hilbert (1862-1943).

Al grande matematico tedesco non interessa la « sostanza », l'essenza di questi enti geometrici primitivi, essi sono solo elementi di insiemi generici che, per essere chiamati quelli che noi intendiamo, devono godere di precise e ben definite proprietà (assiomi). Hilbert nei suoi *Grundlagen der Geometrie* (*I fondamenti della geometria*) (1899-1900) [19] compie il passo definitivo verso la formalizzazione della geometria. Partendo da tre diversi insiemi di oggetti che convenzionalmente chiama, in modo rispettivo, di punti, di rette e di piani e da cinque gruppi di assiomi (8 detti di collegamento; 4 di ordinamento; 5 di congruenza; 1 delle parallele e 2 di

13 In un modello vanno dimostrati gli assiomi della teoria da modellare (vedi [17]). Nel nostro caso gli altri quattro euclidei valgono immediatamente salvo parziale ed opportuna modifica nel secondo.

14 Si tenga presente che nella geometria di Lobačevskij punto e retta piano sono legati a costruzioni la cui vera origine ed ispirazione fisico-materialistica è fuori discussione (vedi [18]).

continuità), il Nostro descrive in modo del tutto formale la geometria nel senso che qualunque tipo di oggetti che verifichino questo sistema potrà « rappresentare » la *geometria*.

Ciò che dovrà quindi preminentemente interessare non sarà tanto la *natura* degli enti geometrici, quanto piuttosto il loro *comportamento* e cioè soprattutto il fatto che la geometria che si costruisce non sia contraddittoria e gli assiomi tra loro indipendenti. Né ha allora piú senso indagare se questi assiomi siano intrinsecamente *veri* o *falsi*, *evidenti*, *semplici* o meno.

La sistemazione hilbertiana pur contemplando come schema principale e massimale la geometria euclidea, prevede anche le varie possibilità delle cosiddette geometrie *non* [15]. Ciò sfruttando appunto le indipendenze dei vari assiomi fra di loro. Hilbert (siamo al primo Hilbert) risolve i problemi di *indipendenza* e *non-contraddittorietà*, con il ricorso al modello che però costruisce in modo analitico-numerico (accettando la aritmetica come teoria non-contraddittoria a priori).

Dunque con l'opera hilbertiana la geometria si formalizza in modo del tutto valido anche se, come si può constatare, il linguaggio espositivo è quello naturale che pur essendo usato in senso convenzionale non possiede le doti di inequivocità del linguaggio simbolico [16].

4. *La formalizzazione dell'aritmetica*

Le prime significative posizioni formalistiche sulla concezioni del numero si hanno in piena atmosfera positivista per mezzo dell'opera di H. Henkel *Teorie der complexen Zahlensysteme* (*Teoria dei numeri complessi*) in cui con chiarezza viene esposta questa concezione del numero. Henkel scrive:

15 Non solo non-euclidee, ma anche non-arguesiane, non-archimedee ecc.

16 Ricordiamo che Peano nel 1889 (prima di Hilbert) fa pubblicare dai Fratelli Bocca di Torino *I princípi di geometria logicamente esposti* usando il proprio simbolismo ed una assiomatizzazione di notevole interesse.

« Oggi il numero non è piú una cosa, una sostanza, che esista autonomamente fuori del soggetto pensante e degli oggetti che lo originano, un principio a sé (come era invece, ad esempio, per i pitagorici). La questione dell'esistenza di un numero non può dunque comprendersi se non in riferimento al soggetto pensante o agli oggetti pensati, le cui relazioni sono rappresentate dai numeri. A rigore, per il matematico è impossibile solo ciò che è impossibile logicamente ossia autocontraddittorio ».

Piú tardi, nel 1898, J. Thomae nella sua *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veranderlichen* (*Teoria elementare delle funzioni analitiche di una variabile complessa*), dichiara quanto segue: « La concezione formale della Aritmetica ammette limitazioni piú modeste che la concezione logicista. Essa non domanda: che sono, e che fanno i numeri? ma piuttosto: che ci attendiamo dai numeri in Aritmetica? Per il formalista l'Aritmetica è un gioco con segni qualificati vuoti. Ciò significa che nel gioco calcolatorio, essi non hanno altro contenuto che quello loro assegnato dal loro comportamento rispetto a certe regole di combinazione (le regole del gioco) ».

Queste posizioni trovarono in G. Frege un tenace avversario. Non è infatti difficile comprendere come la posizione formalista anticontenutistica per definizione sia profondamente diversa dal *logicismo fregiano* che *sostanzializzava logicamente* il numero.

Come è noto Frege (1879) è il « caposcuola » di quella corrente di pensiero matematico che intendeva fondare la matematica sulla logica (da cui il nome di *logicismo* al suo « programma »), piú precisamente su nozioni puramente logiche quali *concetto* ecc. La sua opera contribuirà notevolmente a far progredire il *metodo assiomatico,* il cui perfezionamento è assolutamente indispensabile per la *formalizzazione*. Cosí egli afferma nei *Grundlagen der Arithmetik* (*I fondamenti della Aritmetica*) che è indispensabile, onde evitare equivoci e ridondanze, una chiara distinzione fra proposizioni primitive, cioè assiomi, regole inferenziali e proposizioni derivabili.

Ma vediamo brevemente come Frege arriva a definire il numero. Intanto per dire che « *a* appartiene all'insieme **F** » diremo con Frege che « *a* cade sotto il concetto *F* (che determina **F**) ». Dato per scontato il concetto di *corrispondenza biunivoca* [17] il Nostro stabilisce *che il concetto F è equinumerico al concetto G se solo se esiste una corrispondenza biunivoca φ tra gli oggetti che cadono sotto il concetto F e quelli che cadono sotto il concetto G.*

Allora *il numero del concetto F* sarà il concetto « equinumerico a *F* », e cioè il numero relativo ad *F* è l'*estensione* del concetto « ugualmente numeroso al concetto *F* ».

Altra definizione importante per la costruzione della aritmetica *fregeana* è la seguente:

« *n* è un numero » significa « esiste un concetto tale che *n* è il numero che gli appartiene ». A questo punto è necessario qualificare ogni numero come appartenente ad un certo concetto, ciò sarà possibile dando un elenco, una successione di definizioni che descriva tutta la successione di numeri, cosí:

0 è il numero appartenente al concetto « non identico a sé stesso »;

1 è il numero appartenente al concetto « identico a 0 »;

2 è il numero appartenente al concetto « identico a 0 e a 1 »;

3 è il numero appartenente al concetto « identico a 0, a 1 e a 2 »

e cosí via.

Queste definizioni sono puramente logiche. Cioè, essendolo chiaramente la prima, lo sono anche le altre, dal momento che queste sono costruite a partire dalla prima.

Questo tipo di definizioni, pur essendo date « numero per

[17] Cioè, siano *F* e *G* due concetti (che determinano due insiemi distinti) una *corrispondenza biunivoca* è tale che ad ogni *a* che cade sotto il concetto *F* fa corrispondere uno ed un solo *a'* che cade sotto *G* ed inoltre ogni *a'* che cade sotto *G* è il corrispondente di uno ed uno solo *a* che cade sotto *F*.

numero » in effetti hanno un carattere « generativo ». Ciò dà loro un autentico senso di compattezza.

Da osservare che la teoria cantoriana in merito è quanto mai analoga laddove si sostituiscano i termini *fregeani,* quali ad esempio *corrispondenza biunivoca,* con i cantoriani, quali ad esempio *equivalenza* fra insiemi (*equipotenza*). In breve con il linguaggio di Cantor le idee di Frege si possono riscrivere cosí:

a) Il numero cardinale di un insieme è l'insieme di tutti gli insiemi equipotenti.

b) I numeri naturali 0, 1, 2, 3, ecc. considerati come numeri cardinali, si possono definire in modo puramente logico cosí:

0: è il cardinale relativo all'insieme di ciò che non è identico a sé stesso;

1: è il cardinale relativo all'insieme che ha per unico elemento 0;

2: è il cardinale relativo all'insieme che ha per unici elementi 0 e 1

e cosí via.

Va poi considerato il contributo all'aritmetica di J. W. Dedekind (1888) che in *Was sind und was sollen die Zalhen?* [18] giunge ad una teoria dei numeri naturali che potremo ritenere *autenticamente assiomatica.* Dedekind si differenzia da Frege per il fatto che mentre il secondo lega — come abbiamo visto — il numero alla estensione dei concetti e quindi inizia l'aritmetica dai numeri *cardinali,* viceversa Dedekind, pur iniziando le sue considerazioni dalla nozione di insieme, prende in considerazione la concezione *ordinale* del numero.

Il lettore si sarà accorto che nelle concezioni sia *fregeane* che *cantoriane* interviene in modo determinante la nozione di *insieme.* La teoria insiemistica che conseguentemente si sviluppa è regolata piú o meno esplicitamente anche dal seguente *principio di comprensione*:

> Dato un certo concetto, esprimente una determinata proprietà, esiste sempre (ed è unico per il principio di estensione)[19] l'insieme di tutti e soli gli «oggetti» che godono della proprietà.

L'uso *indiscriminato* di questo principio comporta la possibilità di individuare *qualsiasi* insieme, di qualunque natura purché concepibile.

La negatività epistemologica di tale fatto viene dimostrata dall'insorgere delle *antinomie.*

Russell (1872-1970) « mise in crisi » l'opera fregeana, costruendo quell'antinomia che va sotto il suo nome. Lo stesso Frege, pieno di sconforto, dichiara in appendice al secondo volume dei suoi *Fondamenti dell'aritmetica* (1903) il fallimento del proprio programma logicistico a causa di una « scoperta » di Russell, comunicatagli dal medesimo con una lettera del 16 giugno 1902.

Il sistema *fregeano* viene messo in serie difficoltà da una antinomia cosí come era successo nel caso della sistemazione cantoriana degli ordinali transfiniti, colla scoperta dell'altrettanto celebre antinomia detta di Burali-Forti (1897). Una antinomia dunque, che è una contraddizione interna al sistema, provoca la crisi del sistema stesso [20]; nascono cosí nuovi sistemi proprio dall'analisi delle stesse antinomie, dall'analisi cioè del loro « insorgere ». Il sistema dei *Principia* — in fondo — avrebbe voluto rappresentare una restaurazione del programma logicista, una revisione collegata ad una risoluzione dei problemi sorti con le antinomie.

Vediamo ora in cosa consiste l'antinomia di Russell. Se si considera il principio aristotelico del terzo escluso (« *p* oppure non-*p* » è una tautologia) assegnato un insieme **M**, si ha la se-

18 *Che cosa sono e che cosa devono essere i numeri?*

19 « Due insiemi che hanno gli stessi elementi sono eguali ».

20 Cioè lo rende contraddittorio. Vedi, per ulteriori chiarificazioni, [20] e, per le conseguenze del teorema dello Pseudo Scoto (*ex absurdis sequitur quodlibet*), [21].

guente alternativa: o **M** è un elemento di **M**, o non lo è. Nel secondo caso l'insieme si dice « normale ».

Consideriamo allora l'insieme **G** che contiene come elementi tutti e soli gli insiemi « normali ».

Ci si pone allora il seguente problema: **G** è o non è « normale »? Supponiamo dapprima che non sia normale, allora **G** è un elemento di **G**, ma ciò contraddice la definizione di **G** perché **G** deve contenere soltanto insiemi « normali ». A questo punto potrebbe sembrare di aver dimostrato che **G** è « normale ». Ma se **G** contiene tutti gli insiemi normali deve anche contenere l'elemento **G** (se esso fosse normale), il che significa che **G** non è normale. Dunque anche la seconda ipotesi è contraddittoria, cosicché **G** non può essere né *normale* né *non normale* e quindi non può esistere, nonostante sia stato definito in modo legittimo.

Questa antinomia fu derivata da Russell da quella relativa al numero cardinale dell'insieme di tutti gli insiemi (*Allklasse*) antinomia conosciuta da Russell nel 1901.

Vale la pena riproporre in modo formale l'antinomia di Russell per vedere anche « tecnicamente » la sua struttura [22].

Con la espressione $r\ (x)$ si designi il fatto che l'oggetto individuato da x « appartenga » a quello individuato da r. Se non si fa nessuna ipotesi limitativa sarà possibile la seguente *definizione:*

$$r\ (x) =_{\mathrm{df}} \neg\ x\ (x)$$

Questa definizione implica che

$$\forall\ x\ [r\ (x) \leftrightarrow \neg\ x\ (x)]$$

risulta cosí tra i possibili « valori » di x, r da cui si ha:

(·) $$r\,(r) \leftrightarrow \neg\, r\,(r)$$

Ciò è una equivalenza contraddittoria. Possiamo anche esprimerci nel linguaggio della teoria degli insiemi [6]. Sia allora:

$$\mathbf{G} \equiv \{x \mid x \notin x\}$$

(cioè l'insieme di tutti gli insiemi che *non* si appartengono) Si ha dunque

$$x \in \mathbf{G} \leftrightarrow x \notin x$$

sostituendo **G** ad x si ha:

(*) $$\mathbf{G} \in \mathbf{G} \leftrightarrow \mathbf{G} \notin \mathbf{G}$$

Ora se vale il principio del terzo escluso si ha:

(**) $$\mathbf{G} \in \mathbf{G} \vee \mathbf{G} \notin \mathbf{G}$$

Ma risulta chiaro che se è *vera* la (**) è falsa la (*) e viceversa. Analogamente il discorso, cambiando simboli, si ottiene per la (·).

Dunque si è dimostrata la proposizione

p: « **G** è un insieme normale »

e la sua contraria

$\bar{p}$: « **G** non è un insieme normale »

cioè il sistema è contraddittorio.

Per rimediare alle antinomie — come si è già detto — Russell revisiona il logicismo proponendo la teoria dei tipi [21], Zermelo costruisce la sua teoria assiomatica degli insiemi, gli Intuizionisti [22], convinti che la responsabilità fosse del principio aristotelico del terzo escluso, rifiutano tutto ciò che da questo discende talché si prefiggono di ridurre la matematica alla realtà viva, intuitiva e costruttiva del pensiero rendendola indipendente dalla logica classicamente intesa.

Facciamo vedere ora come secondo le concezioni di Von Neumann, altro sistematore della teoria assiomatica degli

[21] Russell voleva superare con la teoria dei tipi anche le antinomie semantiche, cioè di natura linguistica (come ad esempio quella del *mentitore*) (vedi oltre). Nonostante tutto, successivamente Chwistek e Ramsey constatarono per vie diverse (ed in parte inconsapevolmente) l'impossibilità di una fondazione ortodossa della matematica sulla logica.

[22] Per essi gli olandesi Brouwer, vero e proprio fondatore dell'intuizionismo (moderno), ed Heyting, sistematore.

insiemi, si supera l'antinomia di Russell. Questa infatti svanisce allorché si distingue la nozione di *insieme* da quella di *classe*. Cosí l'insieme di tutti gli insiemi è una *classe* che chiameremo *Ens*. E questa non è un insieme nel senso che qualunque insieme **a** è un elemento di essa, cioè **a** $\in$ *Ens*.

Ora **G** (l'insieme di tutti gli insiemi normali) non è altro se non una sottoclasse di Ens, cioè **G** $\subset$ *Ens*.

Non sarà quindi mai possibile, in questa gerarchizzazione:

I : classe: **G**

II: insieme: **a**

la relazione **G** $\in$ **G** o anche **G** $\notin$ **G** essendo **G** in ogni caso una *classe* e mai un *insieme*.

La costituzione di simbolismi, di linguaggi di vario tipo rappresentano il contributo formalista del logicismo. Differentemente dalla geometria classica in cui faceva testo il riferimento alla realtà fisica, le teorie logiciste si rifanno ad idee, ad oggetti mentali generici, quanto vuoi, ma comunque mentalmente ben esistenti e di preciso *significato*. In fondo Frege come Cantor cercavano di rispondere alla domanda: *che cos'è il numero?* Il formalista invece deve domandarsi: *come si comporta il numero?* A questa domanda rispose, anche se con mentalità « euclidea », il nostro G. Peano. Nell'*Aritmetices principia nova methodo exposita* (*I princípi dell'aritmetica esposti con nuovo metodo*) (1889) [23] Peano parte da nove assiomi, quattro dei quali riguardano le proprietà dell'uguaglianza e gli altri cinque sono i postulati veri e propri dell'aritmetica.

Il Nostro prende le mosse da tre concetti primitivi, quelli di *numero, successore*, 1 (*uno*).

I postulati peaniani sono allora:

P. 1: 1 è un numero

P. 2: il successore di qualsiasi numero è un numero

P. 3: due numeri non hanno mai lo stesso successore

P. 4: 1 non è il successore d'alcun numero

P. 5: se una qualsiasi proprietà appartiene sia ad 1, sia al successore di qualsiasi numero che la abbia, allora questa appartiene a tutti i numeri.

Se il lettore andasse a controllare la teoria di Dedekind si accorgerebbe che questi postulati assomigliano molto alle « condizioni » dedekindiane.

Peano compie un passo definitivo verso la formalizzazione della Aritmetica. Il suo sistema potrà essere *opportunamente* interpretato in termini logico-simbolico sia riferendoci alla logica dei predicati del primo ordine sia a quella del secondo ordine.

Ma anche leggendoli come li abbiamo riportati sopra ci si può rendere conto della loro impostazione formalista: numero, successore e 1 hanno solo valore convenzionale [23].

Fu Russell che mise in evidenza l'intrinseco formalismo degli assiomi peaniani. Infatti essi non caratterizzano l'insieme dei numeri naturali ma praticamente ogni tipo di progressione. Per rendercene conto basterà ad es. sostituire in P. 1, P. 2, P. 3, P. 4, P. 5 ad 1, 2, a successore inteso come $x + 1$, successore intero come $x + 2$, a numero, numero pari.

5. *La formalizzazione della logica*

Quanto visto finora riguardava in fondo problemi di natura logica relativi a teorie di per sé extralogiche come la geometria e l'aritmetica. Problemi quali quelli di indipendenza, di non-contraddittorietà per una teoria rappresentano riflessioni *sulla* teoria piuttosto che *nella* teoria e riguardano la conformazione logica, la rigorosità della teoria in questione. Si tratta insomma di problemi logici scaturiti da riflessioni epistemologiche, dettate a loro volta da esigenze tecniche ben precise quali, nel caso della non-contraddittorietà, quelle di *non* costruire teorie *errate*. Si è visto quindi cosa significhi

[23] Per taluni aspetti la concezione peaniana della matematica va ritenuta logicista. Comunque la sua impostazione differisce senz'altro da quella *fregeana* e *cantoriana*. Ma sull'opera del matematico e logico torinese non sembra ancora facile dare un deciso giudizio storico.

formalizzare una certa teoria o meglio quale è stata la genesi storica della formalizzazione di questa o quella teoria (geometria e aritmetica). In sintesi si è constatato che ciò significa giungere ad una serie di proposizioni primitive (assiomi) indipendenti fra loro che non conducano a contraddittorietà e che non predichino intorno alle caratteristiche di una particolare realtà significante, ma che siano astrazioni da essa nel senso che possano essere riferite anche ad altre e piú realtà significanti. Ora invece l'oggetto delle nostre considerazioni sarà proprio la *logica,* cioè il ragionamento formale, i procedimenti che regolano il nostro modo di ragionare. Vediamo subito quali furono le prime formulazioni. Come abbiamo accennato Leibniz [24] fu il primo a distaccarsi dal modello aristotelico ed a « programmare » un calcolo logico. Chi, riconducendosi direttamente alle idee leibniziane, attuò per una notevole parte suddetto programma fu George Boole (1815-1864).

Egli costruí infatti un tipo di calcolo logico abbastanza generale e di natura algebrica. Definiamo riferendoci alle esemplificazioni delle classi (insiemi) le operazioni logiche booleane. Il Nostro indica con 1 l'universo del discorso, cioè la totalità delle classi, con 0 l'universo nullo, ossia la classe vuota. Indica allora come *prodotto logico* $(x\ y)$ il risultato (atto) di una successione di atti elettivi x, y che scelgono prima gli a che godono della proprietà X (cioè appartenenti all'insieme X) e tra tali a poi quelli che appartengono anche ad Y. In definitiva si sceglie un elemento o meglio una serie di elementi che godono tanto di X quanto di Y. Per *somma logica* si intende l'atto elettivo che determina gli elementi dotati della proprietà X o della proprietà Y ma non di entrambe; indicheremo questa operazione, mediante i simboli

[24] Il programma leibniziano prevedeva la istituzione di:

a) una *ars demostrandi* che doveva costituire lo strumento logico-formale, il *calculus ratiocinator;*

b) una *ars inveniendi* che doveva rappresentare il modo di realizzare la conoscenza;

c) un *inventarium,* cioè un bagaglio di conoscenze « primitive » certissime ed universali, da cui dover prendere le mosse.

elettivi, cosí $x + y$. Per *differenza logica,* che indicheremo con $x - y$, si intende l'atto elettivo che determina gli elementi che godono della proprietà X e non anche della proprietà Y. Per il prodotto logico, Boole assume anche la legge di idempotenza: $x \cdot x = x$ cioè $x^2 = x$ e generalizzando $x^n = x$. Definisce quindi l'elemento contraddittorio di x cosí: $(1 - x)$, cioè il suo complemento rispetto all'universo [25]. Ne discendono alcune interessanti proprietà. Ad esempio, poiché salvo le variazioni e le interpretazioni sopra riportate il calcolo booleano « funziona » in modo assai prossimo alla consueta algebra, dalla idempotenza: $x^2 = x$ discende $0 = x - x^2$ cioè $0 = x\ (1 - x)$ $(\cdot)$. La $(\cdot)$ debitamente interpretata è niente altro che il principio di non-contraddizione, cioè « $\neg (p \wedge \neg p)$ è una tautologia ». Infatti sia x una proposizione, $(1 - x)$ la sua negazione, il prodotto logico la congiunzione e $0 =$ la negazione di tutto quello che è al membro destro di $(\cdot)$ (o meglio « è falso $x \cdot (1 - x)$ cioè $[p \wedge \neg p]$, cioè è vero $\neg p \wedge \neg p$). Insiemisticamente cioè secondo le classi la $(\cdot)$ significa che l'intersezione di una classe X con il suo complemento è vuota, cioè dà per risultato la classe vuota. Dunque l'idempotenza per il prodotto logico esprime il principio di non-contraddizione.

Anche il principio del terzo escluso ($p \vee \neg p$ è una tautologia) può essere ricavato dal sistema booleano, infatti

$$x + (1 - x) = x + 1 - x = 1. \ (\cdot\cdot)$$

Infatti anche qui sia x una proposizione, $(1 - x)$ la sua negazione, la somma logica sia in connettivo della disgiunzione e $=$ 1 stia per « è vera ». Insiemisticamente la $(\cdot\cdot)$ significa che l'unione fra un insieme ed il suo complemento dà l'universo. Infine poiché nel sistema booleano si ha (vedi [12])

$$x = x$$

[25] In effetti il sistema booleano originario prevede di un x un contrario $-x$ ed un contraddittorio $(1 - x)$; per un breve approfondimento, vedi [24].

abbiamo ritrovato tutti e tre i princípi aristotelici. In questo sistema è poi possibile giustificare anche la sillogistica, cioè si possono « derivare » i vari sillogismi, per cui senz'altro la logica-algebra di Boole è piú generale e piú potente dei sistemi classici sillogistici. Boole matematizza o meglio algebrizza la logica ponendosi, cronologicamente prima, su un piano per certi aspetti opposto a quello di Frege e del « programma » logicista (fondare sulla logica la matematica). Boole pur avendo sufficientemente chiara la distinzione fra *momento sintattico* (combinazioni dei simboli mediante leggi) e *momento semantico* (interpretazioni possibili del sistema) tuttavia lega ancora il simbolo ad una rappresentazione significativa preferenziale, cioè alla logica delle classi. Comunque — vale la pena sottolinearlo — le concezioni booleane sono pienamente consapevoli di questi due momenti semiotici e della distinzione quindi fra simbolo e relativo significato. Siamo quindi già in un'atmosfera ottimale per la formalizzazione e questo è dovuto anche al momento culturale in cui fiorí l'opera booleana. Non si deve dimenticare infatti che è quello il periodo in cui si risente delle discussioni e dei risultati della famosa scuola algebrica di Cambridge nel cui seno prende consapevolmente forma l'algebra simbolica. Il cammino verso la completa formalizzazione dei sistemi logici non è certo breve Dopo Boole, logici quali McColl, Jevons, Piarce, Schröder, Frege, Peano, Russell svilupparono e presentarono vari tipi di sistemi logici con simbolismi non sempre collimanti. Si deve peraltro aggiungere che, essendo legata alla formalizzazione la chiarificazione del concetto di linguaggio e quindi della sintassi e della semantica, e cioè in ultima analisi la esposizione rigorosa di una teoria, tanto i *logicisti* che gli *intuizionisti* (come d'altronde qualunque altra scuola, concezione della logica) nella formulazione delle loro teorie adottano lo strumento della formalizzazione. Ciò appunto per una esigenza di rigore. Tanto piú che la distinzione fra le sopradette concezioni non si basa tanto sul modo di esprimersi quanto piuttosto sulle procedure e sulle interpretazioni di queste, cosicché, ad es. in campo logico, la logica classica

(logicista) è ben diversa strutturalmente e sintatticamente dalla logica intuizionista per quel problema rappresentato dall'accettazione o meno del *terzo escluso* (vedi [6]).

A questo punto sembra anche necessaria la distinzione tra *formalizzazione* e *formalismo* come programma e come scuola. Quest'ultimo, nato con D. Hilbert, ha delle caratteristiche programmatiche proprie che lo contraddistinguono da logicismo ed intuizionismo, prerogative interessantissime a cui piú in là accenneremo. Nel seno della scuola formalista si forma il logico P. Bernays il quale nel 1926 [26] ci fornisce un interessante esempio di trattazione del tutto formale e formalistica della logica degli enunciati relativa al calcolo delle proposizioni che si trova nei *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell. Lo riportiamo scrivendo intanto gli assiomi in duplice forma: a destra quella originale ed a sinistra una forma equivalente, tenendo presente che, per definizione, la forma $P \rightarrow Q$ è una abbreviazione della forma $\neg P \vee Q$.

A1 $\neg(p \vee p) \vee p$; $\qquad (p \vee p) \rightarrow p$

A2 $\neg q \vee (p \vee q)$; $\qquad q \rightarrow (p \vee q)$

A3 $\neg(p \vee q) \vee (q \vee p)$; $\qquad (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

A4 $\neg[p \vee (p \vee r)] \vee [q \vee (p \vee r)]; \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$

A5 $\neg(\neg q \vee r) \vee [\neg(p \vee q) \vee (p \vee r)]$;

$$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$$

(Altrettanto faremo per la *regola di separazione.*)

Le regole inferenziali sono:

Regola di separazione (*modus ponens*):

$$\frac{\neg H \vee \Theta \quad H}{\Theta}; \qquad \frac{H \rightarrow \Theta \quad H}{\Theta}$$

[26] *Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der « Principia Mathematica »* (*Ricerche assiomatiche sul calcolo enunciativo dei « Principia Mathematica »*), in *Math. Zeit.*, XXV, 1926, pp. 305-320.

Regola di sostituzione: Se ad un certo punto della dimostrazione o della derivazione compare la espressione H si può ottenere un passo successivo (della dimostrazione o derivazione) sostituendo in H ad es. ad ogni occorrenza della lettera p una sempre medesima espressione Θ. In simboli:

$$\frac{H}{\mathscr{S}^{p}_{\Theta}}$$

Il sistema esposto è un sistema puramente sintattico formale. Per essere piú precisi dovevamo riportare:

1. il Vocabolario o alfabeto (elenco di simboli e segni) [27]

2. le Regole per la costituzione di formule ben formate (f.b.f.) o espressioni [28].

Quest'ultime sono vere e proprie regole grammaticali cioè regole che permettono la costituzione di espressioni corrette del linguaggio logico che si va per considerare. Infine con gli *assiomi* e le *regole inferenziali* costituivano la sintassi propriamente detta del nostro linguaggio (calcolo) logico. Riassumendo una *logica* sintatticamente formalizzata ha bisogno della costituzione delle seguenti parti:

i) Vocabolario.

ij) Regole per f.b.f. (grammatica).

iij) Assiomi e regole inferenziali (sintassi propriamente detta).

A questo punto dovremo *dimostrare* la non-contraddittorietà di suddetto sistema logico. Il lettore rifletta su quest'ultima frase: dobbiamo dimostrare una proprietà di natura logica (la non-contraddittorietà) per una teoria logica (quella sopra considerata). Si procede tenendo presente un risultato antico cioè il cosiddetto teorema dello Pseudo Scoto. Questo teorema afferma che se in una teoria si può dedurre una contraddizione, cioè P e $\neg P$ allora si può dedurre qualunque proposizione (*ex absurdis sequitur quodlibet*). Ebbene, allora, una teoria non sarà contraddittoria se dimostreremo che c'è qualche proposizione che in essa non si può dedurre. Non si possono però provare tutte le deduzioni possibili in questa teoria (essendo illimitate) per ottenere la dimostrazione in questione. Dovremo piuttosto ragionare al modo che segue. È stabilito che la prova in questione vuole essere puramente sintattica, prescindere cioè da qualunque *interpretazione* (semantica) del sistema considerato; in altre parole ogni espressione in quest'ultimo dedotta vuole essere indipendente da qualsiasi particolare interpretazione. Ciò però val quanto dire che ogni espressione dedotta dovrà valere *per ogni* interpretazione possibile soddisfacente al sistema. Basterà quindi trovare una interpretazione che per almeno una espressione mi consenta di dire che essa *non è conseguibile* dal sistema in questione. Dovremo allora far sí che ogni espressione valida del nostro sistema, della nostra logica sia distinguibile.

Chiamiamo allora **B** una struttura costituita da due elementi $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ in cui sono definite le seguenti operazioni:

1. *Diff.*: $\mathbf{1} - b$, dove b è un generico elemento di **B** cioè o è **0** o è **1** e — è l'usuale operazione di differenza.

2. *Prod.*: $b_i \times b_j$, prodotto usuale fra due elementi generici di **B**.

B cosí strutturato è *chiuso*. Cioè i risultati delle operazioni 1. e 2. appartengono sempre a **B**.

Vediamo allora cosa significa interpretare. Significherà far corrispondere ad una espressione sintattica, ad es. ad un assioma, un certo valore di **B** in modo univoco. Ciò sarà ef-

27 Cioè simboli categorematici inerenti la rappresentazione di enunciati, predicati ecc. e simboli sincategorematici rappresentanti connettivi, operatori, quantificatori ecc. Questi simboli possono essere infiniti secondo il numerabile.

28 Ad es. $\vee \neg \vee qp$ non è una f.b.f. per il nostro linguaggio, vedi il primo capitolo di questo volume e [25].

fettuato associando ad una stessa lettera di una espressione logica sempre un medesimo elemento di **B** una volta fissato.

Se poi fissiamo altri valori di **B** distributivamente secondo sia il numero dei valori di **B** sia il numero delle lettere che compaiono nella espressione considerata e quindi interpretiamo, otteniamo tutte le interpretazioni possibili della espressione. Cosí ad es. per il secondo degli assiomi del nostro sistema abbiamo da prendere in considerazione due sole lettere, p e a; possiamo dare a queste rispettivamente i seguenti valori di **B**:

$$\mathbf{0},\ \mathbf{0}$$
$$\mathbf{0},\ \mathbf{1}$$
$$\mathbf{1},\ \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1},\ \mathbf{1}$$

allora indichiamo con b_p il generico elemento di **B** che si associa a p e con b_q quello che si associa a q. Cioè indicando con $\mathscr{J}$ l'operazione di intepretazione si abbia:

$$\mathscr{J}\ p = b_p \qquad\qquad \mathscr{J}\ q = b_q$$

Ciò ovviamente ancora non basta, bisogna interpretare anche le operazioni. Allora imporremo che:

$$\mathscr{J}\ (\neg\ p) = \mathbf{1} - b_p \text{ analogamente per } q$$
$$\mathscr{J}\ (p \vee q) = b_p \times b_q$$

È facile allora interpretare l'assioma A2:

$$\mathscr{J}\ [(\neg\ p \vee (p \vee q)] = \mathbf{1} - b_p) \times (b_p \times b_q)$$

secondo ogni possibile distribuzione dei valori di **B**. Cioè a secondo membro

per $b_p=\mathbf{0}$, $b_q=\mathbf{0}$ otteniamo: $(\mathbf{1}-\mathbf{0}) \times (\mathbf{0}\times\mathbf{0})=\mathbf{1}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$
» $b_p=\mathbf{0}$, $b_q=\mathbf{1}$ » : $(\mathbf{1}-\mathbf{0}) \times (\mathbf{0}\times\mathbf{1})=\mathbf{1}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$
» $b_p=\mathbf{1}$, $b_q=\mathbf{0}$ » : $(\mathbf{1}-\mathbf{0}) \times (\mathbf{1}\times\mathbf{0})=\mathbf{1}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$
» $b_p=\mathbf{1}$, $b_q=\mathbf{1}$ » : $(\mathbf{1}-\mathbf{1}) \times (\mathbf{1}\times\mathbf{1})=\mathbf{0}\times\mathbf{1}=\mathbf{0}$

Ciò nel caso preso in considerazione si può riassumere dicendo che « *per ogni interpretazione* $\mathscr{J}$ dell'assioma A2 in questione abbiamo sempre lo stesso valore **0** ».

Generalizzando siano:

H_j la generica lettera per indicare una espressione (f.b.f.) della nostra logica [29];

B_j il generico valore rappresentato da un elemento di **B** associato alla espressione (f.b.f.) H_j;

allora quanto precede potrà scriversi cosí:

$$\mathscr{J}\ H_j = B_j$$
$$\mathscr{J}\ (\neg\ H_j) = \mathbf{1} - \mathscr{J}\ H_i$$
$$\mathscr{J}\ (H_i \vee H_j) = \mathscr{J}\ H_i \times \mathscr{J}\ H_j.$$

Stabilita quindi con un certo rigore la nozione di *interpretazione* possiamo dare il criterio che ci permette di identificare le espressioni valide. Ciò si otterrà affermando che sono tali (cioè che sono valide) tutte quelle espressioni H alle quali si può associare *per ogni interpretazione*, cioè per ogni distribuzione dei valori di **B**, sempre lo stesso valore **0**. Cioè:

per ogni $\mathscr{J}$: $\mathscr{J}\ H = \mathbf{0}$, *essendo* H *una generica espressione della nostra logica.*

Senza esaminare tutte le espressioni della nostra logica, basterà vedere se gli *assiomi* sono validi e se le *regole di inferenza* conducono da premesse valide ad espressioni valide. Per i nostri assiomi si lascia la verifica per esercizio al lettore che dovrà procedere in modo del tutto analogo a come abbiamo fatto per A2. Per le regole inferenziali verifichiamo solo il *modus ponens* e cioè la regola di separazione rimandando per la regola di sostituzione a [34]. Allora per la regola di separazione dobbiamo verificare che se le premesse

[29] Si rammenta (v. [21]) che secondo le usuali regole per f.b.f. per enunciati, la generica lettera che indica un enunciato *atomico* è una f.b.f.

valgono **0** anche la conclusione vale **0**. Si tratta di far vedere insomma che se

(1) $\mathcal{J}\ (\neg) P \vee Q) = \mathbf{0}$ [30]

(2) $\mathcal{J}\ (P) = \mathbf{0}$

allora: (3) $\mathcal{J}\ (Q) = \mathbf{0}$ (ossia $b_P = \mathbf{0}$).

La (1) si potrà riscrivere cosí: (4) $(\mathbf{1} - b_P) \times) b_Q = \mathbf{0}$

e la (2) cosí: (5) $b_P = \mathbf{0}$

sostituendo in (4) il valore di b_P che si ha in (5) si ottiene:

$$(\mathbf{1} - \mathbf{0}) \times b_P = \mathbf{0}$$

cioè

$$b_Q = \mathbf{0}$$

che è proprio la (3).

Dunque da espressioni valide si ottengono sempre espressioni valide. Ma ciò comporta anche che ogni espressione *derivabile* nel calcolo da noi considerato deve avere sempre valore **0** dal momento che i « punti » di partenza delle nostre derivazioni, le quali si effettuano mediante la regola di separazione e la regola di sostituzione, sono gli assiomi che abbiamo verificato essere tutti validi. È facile allora constatare che tutte le espressioni (f.b.f.) del nostro calcolo che stanno tra loro nella relazione come Q sta a $\neg Q$ non sono tra loro compatibili nel senso che se Q è derivabile nel nostro calcolo *non* lo sarà anche $\neg Q$ e viceversa (infatti se Q vale **0**, $\neg Q$ vale **1** e viceversa). Dunque abbiamo trovato una serie di espressioni (f.b.f.) non derivabili per il calcolo considerato. Ciò per quanto avevamo premesso in partenza ci garantisce la non-contraddittorietà del sistema logico proposto.

A questo punto si può studiare l'indipendenza dei vari assiomi.

Bernays constatò che A4 era dipendente. Si badi bene che

30 P e Q sono espressioni della nostra logica, mentre b_P e b_Q sono i rispettivi valori in **B** di P e Q.

come osservano i Kneale [26], p. 794, da cui abbiamo tratt apportando modifiche ed ampliando, l'esemplificazione sop esposta del lavoro di Bernays, la dimostrazione in questioı non è basata sulla non contraddittorietà dell'aritmetica. Infaı ad es. la procedura è diversa da quella adottata da Hilbe per provare la coerenza della geometria (nei *Fondamenti del geometria*) mediante l'aritmetica (vedi § 2). Per quanto p riguarda l'uso dei numeri **0** e **1** e delle operazioni considera esso è del tutto *convenzionale*, infatti non sarà difficile c struire una struttura isomorfa (cioè che abbia la stessa forn « strutturale ») a **B** ed usare per **0** e **1** simboli quali α e β. Ci fa appunto Bernays. Di fatto ci troviamo davanti a un nuov interessantissimo episodio che è costituito dalla *formalizzazione della semantica*. È chiaro infatti che la struttura individuata da **B** (in cui compaiono operazioni, che sono relazioı particolari) è una semantica per il nostro calcolo del qual avevamo descritto già rigorosamente la sintassi. L'uso dell *tavole di verità* che a quanto sopra esposto è intimament legato, costituisce il primo passo significativo per la formaliz zazione della semantica. È chiaro che le cose diventano un pc piú complesse nelle interpretazioni e cioè nella semantica d *calcoli* per predicati del primo o del secondo ordine (ved ad es. [17]). Dobbiamo quindi rilevare che anche quand la semantica (per la logica) vuol diventare rigorosa ha altret tanto bisogno come la sintassi della formalizzazione.

Le teorie assiomatizzate formalmente sono cosí individuate. Esse sono composte da sintassi e da semantica. Peı quanto riguarda la logica, la sintassi è costituita oltre che dal *vocabolario* e dalle *regole per formule ben formate*, da *assiomi logici e regole inferenziali* (in alcuni casi solo di queste ultime, vedi [27]) mentre per quel che riguarda altre teorie oltre ad avere gli assiomi logici (espliciti o impliciti) si hanno anche gli *assiomi specifici*, cioè assiomi scritti con lo stesso linguaggio della logica considerata ma che caratterizzano la teoria in questione. Ad es. per l'aritmetica saranno specifici gli assiomi di Peano opportunamente modificati (vedi [20]). Oltre a *indipendenza* e *non-contraddittorietà* [31] i sistemi formali hanno altre importanti proprietà. Cosí un sistema si dice che è *sintatticamente completo* quando per ogni espressione H si può dimostrare o H o $\neg H$. Si dice invece *decidibile* un sistema che contiene procedure algoritmico-meccaniche ed effettive, costituite da una serie finita di passaggi che consenta di stabilire se una espressione sia o no dimostrabile (o confutabile). Come è noto [21] la logica degli enunciati è decidibile (tecnica delle tavole di verità). Per la logica dei predicati invece Church (1936) dimostra che *in generale* questa non è decidibile. E ciò nel senso che si può dimostrare l'impossibilità della esistenza di un tale procedimento. Naturalmente l'affermazione della non esistenza di un procedimento generale di decisione non va intesa nel senso che questo procedimento non esista mai. Infatti è possibile risolvere il problema della decisione per la logica dei predicati *monadici* (del primo ordine) che sono particolari espressioni del calcolo dei predicati. In sintesi il calcolo degli enunciati è completo e decidibile, quello dei predicati del primo ordine è in generale solo completo, quello dei predicati del secondo ordine è né completo né decidibile. L'indecidibilità del calcolo dei predicati del primo ordine ci può stupire se si tiene presente che esso è completo, cioè che possiamo stabilire che ogni sua espressione risulta derivabile o refutabile. Il fatto è che questo non è sufficiente per la decidibilità se manca un *algoritmo,* ossia se non è possibile costruire un algoritmo che decida almeno quali espressioni siano refutabili.

Il formalismo programmatico, cioè, piú precisamente, inteso come concezione intorno ai fondamenti della matematica nasce, come abbiamo già detto, con D. Hilbert e trova, almeno per quel che ci riguarda in questa sede, la sua attuazione pro-

[31] Ricordiamo che un sistema si dice *non-contraddittorio* o *coerente* quando in esso non esiste una espressione H tale che tanto H che $\neg H$ siano dimostrabili (in esso). Gli assiomi di un sistema si dicono *indipendenti* se nessuno di essi è dimostrabile a partire dai rimanenti. Per altre precisazioni vedi ad es. [20].

grammatica nella istituzione della cosiddetta *teoria della dimostrazione* (*Beweistheorie*). Questa teoria ha per scopo fondamentale la « dimostrazione finitista » di non-contraddittorietà per teorie formalizzate. Ambizione di Hilbert era trovare un modo per effettuare questa dimostrazione senza ricorrere alla nozione di *modello* [32]. La teoria della dimostrazione è metamatematica essendo piú che una teoria matematica una teoria *sulla* matematica. L'originario programma *hilbertiano* fu messo in crisi da quel famoso risultato di K. Gödel (1931) che comportava l'impossibilità della dimostrazione della non-contraddittorietà di un sistema con i mezzi offerti dal sistema stesso. Piú precisamente diremo che, poiché Hilbert identificava la metamatematica con l'aritmetica (quella ricorsiva di Skolem) nel senso che i problemi della prima erano perfettamente traducibili nella seconda, e poiché il risultato di Gödel dimostrava la *incompletezza sintattica* (impossibilità di dimostrare sempre o H o $\neg H$) della aritmetica e quindi l'impossibilità di dimostrare con i mezzi offerti dal sistema formalizzato rappresentante l'aritmetica la sua stessa coerenza, discendeva necessariamente la fine del formalismo ortodosso. Chi revisionò notevolmente il programma formalista-finitista fu G. Gentzen (1909-1945). Egli riesce nel 1936 a dimostrare la non-contraddittorietà dell'aritmetica adottando sostanziali ed interessantissime modifiche alle idee di Hilbert; esse in breve consistono:

1. nell'adozione di una logica notevolmente costruttiva, costituita da sole regole, cioè i cosiddetti calcoli naturali, nel caso di tipo L;

2. nell'ampliamento e nel chiarimento del vago concetto di « finito » hilbertiano, estendendolo al segmento degli ordinali lungo il quale si intende sviluppare l'induzione ($\varepsilon_0 = \omega + \omega^\omega + \omega^{\omega^\omega} + \ldots$; ω essendo il primo ordinale transfinito, vedi [28]). Ma Gentzen per dare la sua dimostra-

[32] Nozione alla quale ricorrevamo negli esempi precedenti, vedi cosí ad es. § 2 e § 3. (Sulla *teoria della dimostrazione* vedi il capitolo seguente di questo volume.)

zione di non-contraddittorietà terrà presente anche i risultati di Gödel. Questi (di natura sintattica), come quelli di Tarski (analoghi di natura semantica: la nozione di verità per una teoria non può essere definita all'interno della teoria stessa) e quelli di Gentzen sono tra i piú fondamentali che troviamo in campo logico dal 1930 ai nostri tempi. Assieme a questi sono da ricordare anche i risultati di P. J. Cohen (1963) sulla indipendenza dagli altri assiomi della teoria degli insiemi (sistema assiomatico Zermelo-Fraenkel--Skolem, brevemente **ZF**) dell'ipotesi generalizzata del continuo IGC [33] e dell'assioma della scelta AS [34]. Ciò consente la fondazione di matematiche non-cantoriane (non accettando IGC) e non-zermeliane (non accettando AS).

Il lettore si sarà reso conto dell'importanza che hanno semantica, sintassi, linguaggio, significato ecc. per una sistemazione dei metodi della formalizzazione. Ci è sembrato allora opportuno precisare qualche notizia al riguardo. Cominciamo dalla semantica. Si possono considerare di natura semantica tutti i concetti legati allo studio del significato di una qualunque espressione. In special modo, è un concetto semantico quello di « denotare e definire una cosa », sia nel linguaggio comune, sia nel linguaggio formalizzato della matematica. Cosí ad es. i significati di « vero » e « falso » studiati nella loro accezione semantica sono eguali rispettivamente a « corrispondente alla realtà » e « non corrispondente alla realtà ».

Lo studio moderno della semantica è nato nell'ambito della scuola di Varsavia, dove Lesniewski elaborava i princípi delle antinomie semantiche e Kotarbinski instaurava un analisi sistematica dei princípi fondamentali di semantica e di sintassi. A questa scuola appartiene Alfred Tarski per il quale il metodo formale della sintassi può essere supplito da

33 Per dettagli vedi [28].

34 AS dice che « per ogni insieme M i cui elementi sono degli insiemi P non vuoti e senza elementi comuni due a due, esiste almeno un insieme N ciascuno degli elementi del quale è uno ed un solo elemento di ciascun insieme P ».

concetti semantici che a loro volta possono essere definiti in termini non meno esatti di quelli sintattici. Un discorso critico sul *significato* è abbastanza complesso per essere affrontato in questa sede, rimandiamo gli interessati al fondamentale volume di Ogden e Richard *The meaning of meaning* (*Il significato del significato*).

Possiamo comunque affermare di sfuggita che non si può definire il significato « come ciò che viene comunicato attraverso un segno linguistico », infatti questa definizione presuppone già quella di significato. Dovremo piuttosto compiere ulteriori distinzioni asserendo che i segni del linguaggio con le loro relative combinazioni possono essere riguardati secondo il loro *senso* (o intensione) e secondo la loro *denotazione* (o estensione).

Cioè, se ad es. consideriamo una proposizione, una cosa è il suo senso, cioè quello che essa vuol dire, altra cosa è ciò che essa *denota*, cioè ciò che essa vuole *individuare* [35]. A questo punto sarà opportuno fare la seguente distinzione fra il linguaggio simbolico formalizzato e quello naturale:

1. Nel linguaggio simbolico formalizzato il simbolo non ha valore occasionale ma è prefissato una volta per sempre.

2. Nel linguaggio naturale il simbolo acquista la propria denotazione nell'ambito della frase.

Immediato è il riscontro epistemologico di questa distinzione: la « conoscenza matematica » è « stabile » mentre quella esplicitata nel linguaggio ordinario è « instabile ». Come abbiamo detto in altra occasione (vedi [29]) dovremo però parlare di due « aspetti di conoscenza », il primo indeterminato (espresso dal linguaggio ordinario), il secondo invece determinato (espresso dal linguaggio simbolico-formalizzato). Tuttavia il secondo per essere effettuabile ha bisogno del primo.

35 Si pensi ad es. a locuzioni quali « Il Presidente della Repubblica ».

Un altro aspetto del linguaggio è quello *sintattico*, cioè la ricerca della struttura del linguaggio a prescindere dalla analisi del significato, della realtà che esso rappresenta. Quando si parla di sintassi non si possono tacere i nomi di R. Carnap [30] e C. Morris [31], l'opera dei quali può ritenersi determinante per lo sviluppo di suddetta disciplina. Dice Carnap che per sintassi dobbiamo intendere « la teoria formale delle forme linguistiche del linguaggio, la precisazione sintattica delle regole formali che lo governano e lo sviluppo e lo studio delle regole e delle conseguenze che ne derivano ». Tarski dice che è comunque difficile stabilire un netto limite tra semantica e sintassi, in quanto l'analisi di un determinato aspetto formale spesso non può prescindere dall'analisi del significato e del contesto generale di una certa espressione. Charles Morris, invece accentua la distinzione fra le due parti della *semiotica*, cioè tra la sintassi e la semantica. Cosí pure egli distingue tra « verità fattuale » dipendente dalla contingenza dei fatti, e « verità logica », dipendente solo dal significato delle leggi semantiche. Tale distinzione — afferma Morris — è « necessaria ed indispensabile per una adeguata analisi logica della scienza ». Legata alla formalizzazione della sintassi e della semantica è anche la distinzione tra *linguaggio e metalinguaggio*, cioè tra proposizioni primitive (*linguaggio*) e proposizioni che hanno per oggetto le proposizioni primitive (*metalinguaggio*). Generalizzando, cioè, si deve introdurre una gerarchia di linguaggi, ognuno dei quali ha per oggetto quello precedente. Di qui Tarski prende le mosse per studiare e superare l'antinomia del *mentitore*. Questa antinomia si può formulare cosí:

chi dice « Io mento », se egli mente, sta dicendo la verità; viceversa, se dice la verità egli mente.

Questa antinomia potrà essere superata solo se non si accettano teorie « semanticamente chiuse », cioè teorie nell'ambito delle quali si definiscono nozioni semantiche che invece devono essere inoltrate nell'ambito delle metateorie ad esse associate; cioè: non è possibile definire in una teoria la nozione di verità per la teoria stessa senza cadere in contraddizione.

La frase « Io mento » appartiene al linguaggio oggetto; stabilire se con suddetta frase si dice la verità o si mente significa porsi nel metalinguaggio. Non solo ma il metalinguaggio (cioè la metateoria) deve essere anche piú ricco del linguaggio (cioè della teoria) considerato.

Concludiamo mettendo in evidenza un'interessante convinzione di Tarski. Secondo questi la formalizzazione della semantica del linguaggio naturale può attuarsi solo in modo approssimativo, cercando il minor possibile discostamento da esso. Questa tesi appare, da un lato, convincente se si considera alcuni lavori e risultati di R. Barcon Marcus. Ma dal lato della linguistica generativa, trasformazionale (vedi [32], [33]) la cosa sembrerebbe posta forse in tutt'altro modo. È poi assai spontaneo osservare che l'idea della gerarchizzazione instaurata nei *Principia* si ritrova pure nella distinzione tra linguaggio e metalinguaggio, anche se gli intendimenti e le realizzazioni sono diversi. Comunque almeno un fine pare comune: il superamento delle antinomie semantiche.

6. *Conclusione*

La formalizzazione come metodologia per la trattazione delle cosiddette scienze deduttive (geometria, aritmetica, logica, ecc.) si è rivelata ormai insostituibile non solo per quelle esigenze rigoristiche e chiarificatrici già menzionate, ma anche per la quantità dei risultati epistemologici scaturiti da questo modo di vedere le cose. Pure nelle scienze empiriche l'analisi logico-formale, sia sintattica che semantica, si mostra, a livello di applicazione, nonostante varie difficoltà, di notevole interesse [20].

Si deve concludere che la formalizzazione rappresenta il *metodo* scientifico moderno (cioè contemporaneo), il *modo* che attualmente adottiamo per edificare e per sistemare una scienza.

Come il metodo sperimentale portò sconvolgimento radicale nel modo di far scienza, cosí la formalizzazione rappresenta il criterio irrinunciabile ai fini della fondazione e della sistemazione delle scienze.

Bibliografia

[1] Kant, I., *Critica della ragion pura,* trad. it. G. Lombardo Radice e G. Gentile, Bari, 1963.

[2] Prantl, K., *Storia della logica in occidente,* 4 vv., Firenze, 1955.

[3] Bochenski, J. M., *La logica formale,* 2 vv., trad. it. di A. Conte, Torino, 1972.

[4] *Atti del Congresso di storia della logica,* organizzato dalla SILFS; Univ. di Parma, ott.-nov. 1972.

[5] Lukasiewicz, J., *Aristotle's Syllogistic from the standpoint of Modern Formal Logic,* Oxford, 1957 (esiste parziale trad. it.).

[6] Mangione, C., *La logica nel XX secolo,* in L. Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico,* V, VI, Milano, 1972.

[7] Morandini, F., *Logica,* Roma, Pont. Univ. Greg., 1966.

[8] Caminero, N. G., *Historia philosophiae,* v. I, Roma, Pont. Univ. Greg., 1960.

[9] Cosenza, P., *Tecniche di trasformazione nella sillogistica di Aristotele,* Napoli, Ist. di Storia della Fil. Univ. di Napoli, 1972.

[10] Cosenza, P., *Strutture formali della logica aristotelica,* in *Atti della Acc. di Sc. Mor. e Pol. della Soc. Naz. di Sc.,* v. LXXIX, Napoli, Lett. ed Arti, 1968.

[11] De Morgan, A., *On the syllogism,* n. *IV, and the logic of relations,* in *Trans. Cambr. Philos. Soc.* 9, 1856, e le altre memorie sul sillogismo nella stessa raccolta.

[12] Boole, G., *Analisi matematica della logica,* trad. it. di M. Trinchero, Milano, 1965.
— *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities,* London, 1854.

[13] Smiley, T. J., *What is as syllogism?* in *Journal of Philosophical Logic,* n. 2, (1973).

[14] Leibniz, G. W., *Saggio di calcolo universale,* trad. it. in M. Mugnai, *Leibniz e la logica simbolica,* Firenze, 1973.
— *Saggio di calcolo,* trad. it. in M. Mugnai, *op. cit.*

[15] Frajese, A., *Attraverso la storia della matematica,* Firenze, 1972.

[16] Beltrami, E., *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea,* in *Giornale di Matematiche,* v. VI, 1868.

[17] Dalla Chiara Scabia, M. L., *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari,* Milano, 1968.

[18] Lobačevskij, N. I., *I nuovi princípi di geometria,* trad. it. e introduz. di L. Lombardo Radice, Torino, 1963.

[19] Hilbert, D., *I fondamenti della geometria,* trad. it. di Pietro Canetta, Milano. 1970.

[20] Dalla Chiara Scabia, M. L., *Logica,* Milano, 1974.

[21] Casari, E., *Lineamenti di logica matematica,* Milano, 1967.

[22] Beth, E. W., *I fondamenti logici della matematica,* trad. it. di E. Casari, Milano, 1963.

[23] Peano, G., *Arithmetices principia nova methodo exposita* (1889) (si trova nella raccolta delle opere di G. Peano a cura di U. Cassina e per conto dell'Un. Mat. Ital.).

[24] Freguglia, P., *Prodromi booleani alle forme normali disgiuntive,* in *Archimede,* 1974, n. 3-4.

[25] Mendelson, E., *Introduzione alla logica matematica,* trad. it. di T. Pallucchini, Torino, 1972.

[26] Kneale, W. e M., *Storia della logica,* trad. it. di A. Conte, Torino, 1972.

[27] Mangione, C., *Elementi di logica matematica,* Torino, 1965.

[28] Cohen, P. J., *Teoria degli insiemi ed ipotesi del continuo,* trad. it. di G. Lolli, Milano, 1973.

[29] Freguglia, P., *Platonismo ed intuizionismo e loro superamento,* in *Archimede,* 1972, n. 6.
[30] Carnap, R., *Sintassi logica del linguaggio,* trad. it. di A. Pasquinelli, Milano, 1966.
— *Introduction to semantics,* Cambridge, 1948.
[31] Morris, Ch., *Segni, linguaggio, comportamento,* trad. it. di S. Ceccato, Milano, 1963.
[32] Chomsky, N., *Le strutture della sintassi,* trad. it. di F. Antinucci, Bari, 1970.
[33] Chomsky, N., *Saggi linguistici,* 3 vv., trad. it. di A. De Palma e G. Lepschy, Torino, 1969.
[34] Martin, R., *Logique contemporaine et formalisation,* Paris, 1964.

Altra bibliografia

E. Agazzi, *La logica simbolica,* Brescia, 1964.
— *Introduzione ai problemi dell'assiomatica,* Milano, 1961.
R. Blanchè, *Logica ed assiomatica,* trad. di F. Costa, Firenze, 1968.
W. V. Quine, *Logica elementare,* trad. it. F. Gana, Roma, 1968.
P.S. Novikov, *Elementi di logica matematica,* trad. it. di R. Cordeschi, Roma, 1975.
H. Scholz, *Storia della logica,* trad. it. E. Melandri, Milano, 1962.
E. Carruccio, *I mondi della logica,* Bologna, 1972.
P. F. Strawson, *Introduzione alla teoria logica,* trad. it. A. Visalberghi, Milano, 1961.
S. Maracchia, *Le matematiche come sistema ipotetico-deduttivo - Profilo storico,* Firenze, 1975.
P. Freguglia, *Istituzioni di storia delle matematiche da un punto di vista fondazionale,* Genova, in corso di pubblicazione.

Carlo Cellucci

La logica come teoria della dimostrazione

Introduzione

Sarebbe improprio voler spiegare gli sviluppi del « metodo matematico » unicamente in termini di ricerca del rigore. La ricerca del rigore acquista un ruolo predominante solo nei momenti di crisi, quando le concezioni fondamentali vengono messe in questione e richiedono una sostanziale revisione. Cosí nella matematica greca l'elaborazione del metodo assiomatico, culminante negli *Elementi* di Euclide, costituí una risposta alle difficoltà causate dalle implicazioni geometriche dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e dai « paradossi » della continuità. Analogamente nel secolo scorso la revisione del metodo assiomatico, culminante nei *Fondamenti della geometria* di Hilbert, costituí una risposta alle difficoltà dovute al nascere delle geometrie non euclidee, da un lato, e delle teorie dell'algebra astratta, dall'altro.

In questa luce va vista l'evoluzione della nozione di dimostrazione. La versione ufficiale, accreditata dagli storici greci, secondo cui tale nozione sarebbe nata solo con la matematica greca, mentre i procedimenti adoperati, ad esempio, dai matematici babilonesi non potrebbero essere accettati come dimostrazioni, trova la sua giusta nemesi nella versione ufficiale post-hilbertiana, secondo cui le dimostrazioni euclidee non sarebbero delle « vere » dimostrazioni se non emendate secondo il paradigma hilbertiano. In entrambi i casi il cambiamento del paradigma della dimostrazione dipende strettamente dalla soluzione che viene data alle crisi sopra menzionate.

Tale cambiamento conduce ad una inevitabile proiezione del nuovo ideale di rigore sugli sviluppi precedenti della matematica, che si basa sull'assunzione che questi sviluppi siano momenti di un processo lineare, con caratteristiche largamente invarianti nelle diverse epoche. Non occorre insistere sul carattere conservatore di tale assunzione. Basti pensare, ad esempio, alla sorte toccata alla dimostrazione originaria di Brouwer del teorema dello sbarramento, che non rientrando nel paradigma di dimostrazione corrente ha trovato scarso apprezzamento. In effetti la credibilità del teorema è aumentata solo dopo che si è riusciti a sostituire la dimostrazione di Brouwer con un'altra, che pur comportando assunzioni solo marginalmente piú plausibili, rientra però nel paradigma di dimostrazione corrente.

Per evitare queste conseguenze occorre sempre tener presente che ogni analisi della nozione di dimostrazione è relativa ad un paradigma. Ciò del resto è ovvio se si ricorda che la parola « dimostrazione » viene usata comunemente per designare i processi mentali, o piú semplicemente la comunicazione linguistica dei processi mentali, con cui ci si persuade della validità di un teorema matematico. Quel che veniva accettato come un argomento convincente negli *Elementi* di Euclide è in molti casi ben diverso da quel che si richiede oggi.

Il paradigma della nozione di dimostrazione che verrà analizzato in seguito è quello di *dimostrazione espressa in un linguaggio del primo ordine*. Questa scelta ha un valore puramente esemplificativo, e si giustifica nella misura in cui l'analisi può essere estesa senza sostanziali modifiche ad altre nozioni di dimostrazione. Ciò non toglie che esistano attualmente delle nozioni di dimostrazione che, almeno apparentemente, non sono riconducibili a tale analisi. Ci si riferisce qui al fatto ben noto che vi sono, ad esempio, delle dimostrazioni della teoria dei campi reali ordinati che fanno uso di certe costruzioni insiemistiche, come quella della chiusura reale di un campo reale ordinato, e di operazioni insiemistiche su di essa, che non possono essere espresse nel linguaggio della teoria dei campi reali ordinati.

Di fatto, come nel caso della dimostrazione originaria di Brouwer del teorema dello sbarramento, tali dimostrazioni possono essere sostituite con altre espresse nel linguaggio della teoria dei campi reali ordinati, ma ciò lascia aperto il problema di rendere conto delle dimostrazioni originarie. Altri tipi di inadeguatezze si hanno nel caso delle dimostrazioni intuizioniste, anche ad un livello molto elementare (cfr. [2]). Perciò il valore dell'analisi proposta dipende dalla misura in cui queste nozioni di dimostrazione impongono un cambiamento piú o meno radicale di paradigma, o possono essere in qualche modo riassorbite in uno dei paradigmi cui si applica tale analisi.

1. *I linguaggi del primo ordine*

Diamo anzitutto una descrizione dei linguaggi del primo ordine. I *simboli* di un linguaggio del primo ordine comprendono le variabili individuali libere $a, b, \ldots$, le variabili individuali vincolate $x, y, \ldots$, un numero qualsiasi di costanti descrittive, le costanti logiche $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\perp$, e simboli ausiliari (le parentesi e la virgola). Due linguaggi del primo ordine differiscono tra loro per la scelta delle costanti descrittive, sebbene come vedremo in seguito per certi particolari scopi essi possano differire anche per la scelta delle costanti logiche. Le costanti descrittive possono essere delle costanti individuali $i, j, \ldots$, delle costanti funzionali n-arie $f^n, g^n, \ldots$, o delle costanti relazionali n-arie $R^n, S^n, \ldots$ $(n > 0)$.

I *termini* sono definiti da:

(*i*) ogni variabile individuale libera e ogni costante individuale è un termine;

(*ii*) se f^n è una costante funzionale n-aria e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $f^n\ (t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.

I *termini chiusi*, o *nomi*, sono i termini che non contengono variabili individuali libere.

Le *formule atomiche* sono $\perp$ e tutte le espressioni della forma $R^n(t_1, \ldots t_n)$, dove R^n è una costante relazionale n-aria e $t_1, \ldots t_n$ sono termini. Le *formule* sono definite da:

(*i*) ogni formula atomica è una formula;

(*ii*) se A e B sono formule, allora anche $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \rightarrow B)$ sono formule;

(*iii*) se $A(a)$ è una formula che contiene almeno una occorrenza della variabile individuale libera a, x è una variabile individuale vincolata che non occorre in $A(a)$, e $A(x)$ è un'espressione che differisce da $A(a)$ poiché contiene un'occorrenza di x al posto di almeno un'occorrenza di a, allora $\forall x A(x)$ e $\exists x A(x)$ sono formule.

Le *formule chiuse*, o *enunciati*, sono le formule che non contengono variabili individuali libere. Nello scrivere le formule vengono spesso omesse le parentesi, quando ciò non può dar luogo ad ambiguità. Usiamo $\neg A$ come abbreviazione di $A \rightarrow \perp$ [1].

2. *Dimostrabilità formale, conseguenza logica, conseguenza insiemistica*

Nel paradigma euclideo una dimostrazione $\mathscr{D}$ di un enunciato A viene concepita come una concatenazione di formule vere. L'unico elemento di distinzione tra le formule di $\mathscr{D}$ sta

[1] La principale differenza tra la formulazione dei linguaggi del primo ordine data qui, e la formulazione del linguaggio predicativo discussa in R. Cordeschi e R. Levi, *Predicati: un'introduzione elementare*, in questo volume, sta nell'uso come primitivo di $\perp$ (« falso ») invece di $\neg$ (« non »). Il potere espressivo delle due formulazioni è lo stesso, nel senso che entrambe permettono di definire gli stessi insiemi. Perciò la scelta tra esse è del tutto inessenziale per un'analisi della nozione di *conseguenza insiemistica*, e in virtù del teorema di completezza di Gödel, anche per un'analisi della nozione di *dimostrabilità formale*. (V. appresso § 2). Ma l'adeguatezza di una formulazione per quanto riguarda la definizione degli insiemi non garantisce altrettanta adeguatezza per la rappresentazione delle dimostrazioni. In effetti, come mostra la discussione di Prawitz [21] pp. 34-35, c'è una sostanziale asimmetria tra $\neg$, da un lato, e $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, dall'altro. Perciò l'uso come primitivo di $\perp$ è indispensabile per un'analisi della nozione di *dimostrazione*.

nel modo in cui la loro verità ci è data. In effetti la dimostrazione parte da un certo numero di enunciati che sono veri immediatamente, cioè veri senza l'intermediario di alcuna inferenza, e procede passando da formule la cui verità è già stata stabilita, a nuove formule la cui verità diventa chiara una volta accertata la verità delle formule di partenza. Naturalmente quando si parla di « verità » qui, si intende « verità in un dato sistema di oggetti ». Di tali oggetti gli enunciati iniziali di $\mathscr{D}$ sono veri immediatamente, mentre tutte le altre formule di $\mathscr{D}$ sono vere solo in modo mediato, cioè in base ad un'inferenza.

Col sopravvenire del paradigma hilbertiano questa concezione della dimostrazione viene meno. Soprattutto grazie allo sviluppo di un calcolo logico da parte di Frege si fa strada l'idea che i passi che conducono dagli enunciati iniziali di $\mathscr{D}$ all'enunciato finale A non consistano nel passaggio da formule vere a formule vere in un dato sistema di oggetti, ma da formule ad altre formule che da esse si ottengono facendo uso di certe regole prefissate, che si riferiscono unicamente alla forma delle formule, senza far intervenire il significato delle costanti descrittive o delle costanti logiche che compaiono in esse.

Le regole in questione sono estremamente elementari, ad esempio del tipo del *modus ponens*:

$$(\rightarrow \mathrm{E})\ \frac{A \quad A \rightarrow B}{B}.$$

Il carattere puramente formale delle regole si proietta sulla intera dimostrazione, dando luogo cosí alla nozione di *dimostrazione formale*. L'unico momento non formale è costituito dalla scelta degli enunciati che possono essere adoperati come enunciati iniziali. Tale scelta però, non si giustifica in termini della verità degli enunciati in un dato sistema di oggetti, ma in termini della loro capacità di assolvere a certi particolari scopi.

Il principale difetto della nozione di dimostrazione formale sta nel carattere arbitrario delle regole del calcolo. Naturalmente le regole di Frege permettevano di ottenere tutti i teoremi noti a partire dagli assiomi delle varie branche della matematica, ma non necessariamente nello stesso modo in cui tali teoremi erano stati ottenuti originariamente o venivano ottenuti correntemente. Inoltre furono ben presto formulati altri sistemi di regole che permettevano di ottenere esattamente gli stessi teoremi. Diventava cosí sempre piú chiaro che le regole del calcolo logico di Frege potevano fornire al piú una caratterizzazione della nozione di *teorema,* cioè di *enunciato dimostrabile,* di un linguaggio del primo ordine, ma non certo della nozione di dimostrazione.

Che in effetti fornissero una caratterizzazione della nozione di teorema fu stabilito dal *teorema di completezza* di Gödel, come è facile vedere nel modo seguente. Nel paradigma hilbertiano di dimostrazione un teorema A non è necessariamente vero in un sistema fissato di oggetti. La relazione che sussiste tra l'enunciato A e gli enunciati $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ a partire dai quali A è stato dimostrato richiede solo che A sia vero in ogni sistema di oggetti in cui tutti gli enunciati di Γ sono veri. Questa relazione viene espressa dicendo che A è una *conseguenza logica* di Γ, e viene scritta $Con(\Gamma;\ A)$.

Un elemento di indeterminatezza in tale relazione è dato dal riferimento a sistemi di oggetti qualsiasi. Spesso si adopera il termine « struttura » invece di « sistema di oggetti », ma ciò non contribuisce certo a chiarire che cosa si intenda esattamente. Una nozione piú precisa è quella di struttura insiemistica, cioè di un insieme (nel senso della cosiddetta struttura cumulativa dei tipi, cfr. ad esempio [12] p. 174), in cui sono definite delle funzioni e delle relazioni. (Per dettagli, v. appresso § 4). La relazione che si ottiene da $Con(\Gamma;\ A)$ sostituendo « sistema di oggetti » con « struttura insiemistica » viene espressa dicendo che A è una *conseguenza insiemistica* di Γ, e viene indicata con $C(\Gamma;\ A)$. Naturalmente $Con(\Gamma;\ A)$ e $C(\Gamma;\ A)$ sono distinte dalla relazione « A è dimostrabile formalmente a partire da Γ », cioè dalla relazione « esiste una dimostrazione formale di A a partire da Γ, gene-

rata mediante le regole del calcolo logico di Frege », che viene scritta $D(\Gamma;\ A)$.

Per quanto oscura possa essere la nozione di struttura, essa è almeno tanto chiara da permettere di stabilire che vale l'implicazione:

$$Con(\Gamma;\ A) \rightarrow C(\Gamma;\ A). \tag{1}$$

Infatti supponiamo che $Con(\Gamma;\ A)$, cioè che per ogni struttura $\mathscr{M}$, se tutti gli enunciati di Γ sono veri in $\mathscr{M}$, anche A è vero in $\mathscr{M}$. Sia $\mathscr{M}^*$ una struttura insiemistica. Ovviamente ogni struttura insiemistica è anche una struttura (mentre in generale non vale l'inverso, per esempio la struttura cumulativa dei tipi non è una struttura insiemistica). Perciò dall'ipotesi $Con(\Gamma;\ A)$ segue che, se tutti gli enunciati Γ sono veri in $\mathscr{M}^*$, tale è anche A. Ciò è stato stabilito per una struttura insiemistica qualsiasi $\mathscr{M}^*$, quindi $C(\Gamma;\ A)$, da cui segue il risultato.

Il teorema di completezza di Gödel stabilisce la validità dell'implicazione:

$$C(\Gamma;\ A) \rightarrow D(\Gamma;\ A). \tag{2}$$

Da (1) e (2) si ottiene facilmente:

$$Con(\Gamma;\ A) \rightarrow D(\Gamma;\ A). \tag{3}$$

È chiaro che (3) permette di stabilire il risultato voluto. Infatti, consideriamo la relazione « esiste una dimostrazione di A a partire da Γ », scritta $D_1(\Gamma;\ A)$, per una nozione di dimostrazione diversa da quella di dimostrazione formale generata mediante le regole del calcolo logico di Frege, e che soddisfa la condizione:

$$D_1(\Gamma;\ A) \rightarrow Con(\Gamma;\ A). \tag{4}$$

Tale condizione costituisce un requisito minimo che deve essere soddisfatto da una nozione di dimostrazione In particolare, da un semplice esame delle regole del calcolo logico di Frege appare chiaro che:

$$D(\Gamma;\ A) \rightarrow Con(\Gamma;\ A).$$

Da (4) e (3) segue che:

$$D_1(\Gamma;\ A) \rightarrow D(\Gamma;\ A).$$

Ciò mostra che tutto ciò che è dimostrabile mediante una dimostrazione che soddisfa un paradigma diverso da quello di dimostrazione formale generata mediante le regole del calcolo logico di Frege, è anche dimostrabile formalmente mediante una dimostrazione formale generata in base a tali regole.

3. *Dimostrazione chiusa, dimostrazione aperta*

L'inadeguatezza delle regole del calcolo logico di Frege a caratterizzare la nozione di dimostrazione espressa in un linguaggio del primo ordine, mostra la necessità di un approccio differente. Prima di sviluppare un tale approccio, occorre fare qualche considerazione generale sulla struttura delle dimostrazioni.

Una dimostrazione $\mathscr{D}$ di un enunciato A, espressa in un linguaggio del primo ordine, consta di uno o piú enunciati, ciascuno dei quali o è asserito come valido direttamente, oppure dipende per la sua validità da altri enunciati di $\mathscr{D}$. Ciò suggerisce subito che $\mathscr{D}$ ha una struttura di *albero*, in cui un enunciato che viene asserito come valido direttamente compare come un nodo iniziale, mentre un enunciato che non viene asserito come valido direttamente compare come un discendente immediato degli enunciati da cui dipende per la sua validità. Il passaggio dagli ascendenti immediati di un nodo al nodo costituisce un'*inferenza* di $\mathscr{D}$. Gli ascendenti immediati si dicono le *premesse*, e il nodo si dice la *conclusione*, di quell'inferenza.

Una dimostrazione $\mathscr{D}$ di questo tipo si dice una dimostrazione *chiusa*. Una dimostrazione però può contenere, oltre che enunciati, anche formule che non sono enunciati. Inoltre nella sua struttura d'albero possono comparire come nodi iniziali, oltre che formule asserite come valide direttamente, anche formule introdotte come semplici *assunzioni*. Una dimostrazione $\mathscr{D}$ di questo tipo piú generale si dice una dimostrazione *aperta*.

Una dimostrazione chiusa può contenere come sottodimostrazione una dimostrazione aperta. Tale è il caso, ad esempio, di una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di un enunciato $A \rightarrow B$, che si ottiene dando una dimostrazione aperta $\mathscr{D}_0$ di B che contiene un'assunzione della forma A, e concludendo perciò che vale $A \rightarrow B$. L'assunzione A, che era *aperta* in $\mathscr{D}_0$, viene *chiusa* in $\mathscr{D}$. $\mathscr{D}$ può essere indicata mediante la figura seguente, in cui l'assunzione che viene chiusa è scritta tra parentesi quadre:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\ .$$

Tale è anche il caso di una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di un enunciato $\forall\, x\, A(x)$, che si ottiene dando una dimostrazione aperta $\mathscr{D}_0$ di una formula $A(a)$ che contiene almeno un'occorrenza della variabile individuale libera a, e concludendo perciò che vale $\forall\, x\, A(x)$. Anche qui la variabile individuale libera a, che era *aperta* in $\mathscr{D}_0$, viene *chiusa* in $\mathscr{D}$. $\mathscr{D}$ può essere indicata mediante la figura seguente, in cui la variabile individuale libera che viene chiusa è scritta tra parentesi tonde:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ A(a)\end{array}}{\forall\, x\, A(x)}\,(a)\ .$$

È chiaro però che ciò comporta un'estensione della nozione di dimostrazione chiusa, in cui si ammette che una dimostrazione chiusa possa contenere, oltre che enunciati, anche formule, tutte le cui variabili individuali libere vengono chiuse nel corso della dimostrazione, e oltre che nodi iniziali costituiti da formule asserite come valide direttamente, anche assunzioni che vengono chiuse nel corso della dimostrazione.

Nella dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ dell'enunciato $A \rightarrow B$ sopra considerata, la dimostrazione aperta $\mathscr{D}_0$ di B contiene una unica assunzione aperta A, che viene chiusa nell'inferenza finale di $\mathscr{D}$. Questa restrizione, però, non è necessaria. In generale ammettiamo che in un'inferenza possa essere chiuso un numero qualsiasi, anche nullo, di assunzioni della stessa forma. Piú precisamente, le assunzioni di una dimostrazione $\mathscr{D}$ si suppongono divise in *classi di assunzioni*, cioè in classi disgiunte (A) che constano di un numero qualsiasi, anche nullo [nel qual caso (A) è vuota, cioè $(A) = \emptyset$], di occorrenze differenti della stessa formula A. [Si intende che, per una stessa formula A, $\mathscr{D}$ può contenere piú di una classe di assunzioni (A)]. Se in un'inferenza viene chiusa un'assunzione A appartenente ad una classe di assunzioni (A), in essa devono essere chiuse simultaneamente anche tutte le altre assunzioni che appartengono a quella stessa classe di assunzioni (A), ed esse soltanto.

Analogamente ammettiamo che in un'inferenza possano essere chiuse piú occorrenze della stessa variabile individuale libera a. In questo caso, però, il numero delle occorrenze che vengono chiuse non può essere qualsiasi. Per ragioni che diverranno chiare in seguito occorre richiedere che, in un'inferenza in cui viene chiusa una variabile individuale libera a, vengano chiuse tutte le occorrenze di a. È necessario imporre anche un'altra restrizione su a. La discussione di queste condizioni generali sulle variabili individuali libere che vengono chiuse viene rimandata al § 11.

4. *Verità in una struttura insiemistica*

Un'analisi delle dimostrazioni deve permettere di distinguere le dimostrazioni « corrette », o « valide », da quelle « scorrette », o « non valide ». Il nostro scopo principale sarà

dunque quello di definire che cosa si intende per una *dimostrazione valida* di una formula A.

La definizione viene data per induzione sul numero delle costanti logiche (diverse da $\perp$) che occorrono in A, e ha vari punti di contatto con la nozione di *verità in una struttura insiemistica*, già adoperata nel § 2 senza una precisa definizione. Conviene perciò iniziare l'esposizione dalla nozione di verità in una struttura insiemistica, mostrando poi come da essa si giunga a quella di dimostrazione valida.

Come già accennato nel § 2, una *struttura insiemistica* $\mathscr{S}$ è una tripla $<\mathbf{M}, \{\mathbf{F}^n\}_n, \{\mathbf{R}^n\}_n>$, dove $\mathbf{M}$ è un insieme non vuoto, e per ogni numero naturale $n > 0$, $\mathbf{F}^n$ è un insieme, anche vuoto, di funzioni n-arie con argomenti e valori in $\mathbf{M}$, e $\mathbf{R}^n$ è un insieme, anche vuoto, di relazioni n-arie in $\mathbf{M}$. Qui una funzione n-aria con argomenti e valori in $\mathbf{M}$ va intesa insiemisticamente come un'applicazione che associa un elemento di $\mathbf{M}$ ad ogni n-pla di elementi di $\mathbf{M}$, e una relazione n-aria in $\mathbf{M}$ va intesa insiemisticamente come un insieme di n-ple di elementi di $\mathbf{M}$.

In particolare, se $\mathscr{L}$ è un linguaggio del primo ordine, una *struttura insiemistica* $\mathscr{M}$ *per* $\mathscr{L}$ è una coppia $<\mathscr{S}, \varphi>$, dove $\mathscr{S} = <\mathbf{M}, \{\mathbf{F}^n\}_n, \{\mathbf{R}^n\}_n>$ è una struttura insiemistica, e φ è un'applicazione che associa un elemento di $\mathbf{M}$ ad ogni costante individuale, un elemento di $\mathbf{F}^n$ ad ogni costante funzionale n-aria, e un elemento di $\mathbf{R}^n$ ad ogni costante relazionale n-aria, di $\mathscr{L}$. $\mathbf{M}$ si dice il *dominio* di $\mathscr{M}$, e gli elementi di $\mathbf{M}$ si dicono gli *individui* di $\mathscr{M}$.

L'applicazione φ può essere estesa facilmente ad un'applicazione φ^* che associa un elemento di $\mathbf{M}$ ad ogni nome di $\mathscr{L}$, ponendo:

(i) $\varphi^*(i) = \varphi(i)$, per ogni costante individuale i;

(ii) $\varphi^*(f^n(t_1, \ldots, t_n)) = \varphi(f^n)(\varphi^*(t_1), \ldots, \varphi^*(t_n))$.

In generale non tutti gli elementi di $\mathbf{M}$ sono associati da φ^* ai nomi di $\mathscr{L}$. Tuttavia possiamo sempre aggiungere nuove costanti individuali alle costanti descrittive di $\mathscr{L}$, in modo da estendere φ^* ad un'applicazione, anch'essa indicata con φ^*, dei nomi del linguaggio del primo ordine risultante, diciamo $\mathcal{L}$ ($\mathcal{M}$), *su* **M**.

Definiamo ora un'applicazione Φ che associa, ad ogni enunciato A di $\mathcal{L}$ ($\mathcal{M}$), un elemento dell'insieme $\{V, F\}$, detto l'insieme dei *valori di verità*. La definizione è per induzione sul numero delle costanti logiche (diverse da $\perp$) che occorrono in A, e consta delle seguenti clausole:

(*i*) $\Phi (R^n (t_1, \ldots, t_n)) = V$ se e solo se $<\varphi^* (t_1), \ldots, \varphi^* (t_n)> \in \varphi (R^n)$;

(*ii*) $\Phi (\perp) = F$;

(*iii*) $\Phi (A \wedge B) = V$ se e solo se $\Phi (A) = V$ e $\Phi (B) = V$;

(*iv*) $\Phi (A \vee B) = V$ se e solo se $\Phi (A) = V$ oppure $\Phi (B) = V$;

(*v*) $\Phi (A \rightarrow B) = V$ se e solo se $\Phi (B) = V$ quando $\Phi (A) = V$;

(*vi*) $\Phi (\forall x A (x)) = V$ se e solo se $\Phi (A (t)) = V$ per ogni nome t;

(*vii*) $\Phi (\exists x A (x)) = V$ se e solo se $\Phi (A (t)) = V$ per qualche nome t.

Diciamo che un enunciato A di $\mathcal{L}$ è *vero* in $\mathcal{M}$ o in breve è *$\mathcal{M}$-vero,* se e solo se $\Phi (A) = V$. Se $A (a_1, \ldots, a_n)$ è una formula di $\mathcal{L}$ le cui uniche variabili individuali libere sono $a_1, \ldots, a_n$, per ogni n-pla $<t_1, \ldots, t_n>$ di nomi di $\mathcal{L}$ ($\mathcal{M}$) l'enunciato $A (t_1, \ldots, t_n)$ si dice un *$\mathcal{M}$-caso* di $A (a_1, \ldots, a_n)$. Diciamo che $A (a_1, \ldots, a_n)$ è *$\mathcal{M}$-vera* se e solo se per tutti i suoi *$\mathcal{M}$-casi* $A (t_1, \ldots, t_n)$ si ha che $\Phi (A (t_1, \ldots, t_n)) = V$.

La definizione della $\mathcal{M}$-verità non consente di per sé di stabilire se una formula è $\mathcal{M}$-vera. Ciò appare chiaro da un esame delle clausole (*i*), (*vi*), e (*vii*). In base a (*i*), per stabilire se $R^n (t_1, \ldots, t_n)$ è $\mathcal{M}$-vero occorre stabilire se $<\varphi^* (t_1), \ldots, \varphi^* (t_n)> \in \varphi (R^n)$, e ciò richiede una dimostrazione. Analogamente in base a (*vi*), ad esempio, per stabilire se $\exists x A (x)$ è $\mathcal{M}$-vero occorre stabilire se esiste un nome t tale che $A (t)$ è $\mathcal{M}$-vero, e ciò richiede anche qui una dimostrazione. In altri termini le clausole in questione non forniscono un criterio di $\mathcal{M}$-verità autonomo rispetto alla nozione di dimostrazione.

Ciò mostra che la nozione di dimostrazione è piú fondamentale di quella di $\mathcal{M}$-verità, per cui se si vuole che questa ultima sia di qualche utilità pratica nella determinazione della $\mathcal{M}$-verità di una formula, occorre dare anzitutto una precisazione della nozione di dimostrazione. D'altra parte una tale precisazione renderebbe superflua la nozione di $\mathcal{M}$-verità. Infatti, se il criterio in base a cui si stabilisce che una formula è $\mathcal{M}$-vera è dato da una dimostrazione, tanto vale ridurre la nozione di formula $\mathcal{M}$-vera A di $\mathcal{L}$ a quella di dimostrazione valida di A.

Una definizione della nozione di dimostrazione chiusa valida di un enunciato A, espressa nel linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}$, può essere data seguendo le indicazioni che emergono da un'analisi delle clausole (*i*) - (*vii*) della definizione della $\mathcal{M}$-verità di A. Poiché anche qui la definizione viene data per induzione sul numero delle costanti logiche (diverse da $\perp$) che occorrono in A, è chiaro che la nozione di dimostrazione chiusa valida di A dev'essere relativa ad una classe $\mathcal{S}$ di dimostrazioni chiuse che constano solo di enunciati atomici. La nozione definita è perciò quella di dimostrazione chiusa *valida rispetto a $\mathcal{S}$*, o in breve *$\mathcal{S}$-valida*. Le clausole (*i*) e (*ii*) vengono sostituite con le clausole:

(*i'*) una dimostrazione chiusa $\mathcal{S}$-valida di un enunciato atomico P è data da una dimostrazione di P appartenente a $\mathcal{S}$;

(*ii'*) $\mathcal{S}$ non contiene alcuna dimostrazione di $\perp$.

La clausola (*ii'*) assicura la « coerenza » della nozione di dimostrazione chiusa $\mathcal{S}$-valida. Le clausole (*iii*)-(*vii*) vengono sostituite con le clausole:

(*iii'*) una dimostrazione chiusa $\mathcal{S}$-valida di $A \wedge B$ è data da una dimostrazione chiusa $\mathcal{S}$-valida di A e da una dimostrazione chiusa $\mathcal{S}$-valida di B;

(iv') una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A \vee B$ è data da una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di A oppure da una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di B;

(v') una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A \rightarrow B$ è data da una dimostrazione aperta di B con una classe di assunzioni aperte (A), che si trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di B quando ogni assunzione appartenente ad (A) viene sostituita con una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di A;

(vi') una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $\forall x A(x)$ è data da una dimostrazione aperta di $A(a)$ con una variabile individuale libera aperta a, che si trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A(t)$ quando a viene sostituita con t, per ogni nome t;

(vii') una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $\exists x A(x)$ è data da una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A(t)$, per qualche nome t.

Le clausole critiche sono qui (v') e (vi'). Una traduzione immediata di (v) suggerisce che una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A \rightarrow B$ è data da un'applicazione che associa, ad ogni dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di A, una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di B. Per poter rappresentare una tale applicazione, in (v') si adopera una dimostrazione aperta, con una classe di assunzioni aperte (A). Analogamente, una traduzione immediata di (vi) suggerisce che una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $\forall x A(x)$ è data da un'applicazione che associa, ad ogni nome t, una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A(t)$. Per poter rappresentare una tale applicazione, in (vi') si adopera una dimostrazione aperta di $A(a)$, con una variabile individuale libera aperta a.

In (v') si fa uso del fatto che una dimostrazione aperta $\mathscr{D}$, con una classe di assunzioni aperte (A), si trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}'$ sostituendo ogni assunzione appartenente ad (A) con una dimostrazione chiusa di A. In (vi') si fa uso del fatto che una dimostrazione aperta $\mathscr{D}$, con una variabile individuale libera aperta a, si trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}'$ sostituendo a con un nome t. In generale una dimostrazione aperta $\mathscr{D}$ si trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}'$ sostituendo anzitutto ogni variabile individuale libera aperta di $\mathscr{D}$ con un nome, e sostituendo poi ogni assunzione appartenente ad una classe di assunzioni aperte di $\mathscr{D}$ con una dimostrazione chiusa. Se le dimostrazioni chiuse con cui vengono sostituite le assunzioni aperte di $\mathscr{D}$ sono $\mathscr{S}$-valide, $\mathscr{D}'$ si dice un *$\mathscr{S}$-caso* di $\mathscr{D}$.

La definizione della $\mathscr{M}$-verità di una formula $A(a_1, \ldots a_n)$ di $\mathscr{L}$, le cui uniche variabili individuali libere sono $a_1, \ldots, a_n$, suggerisce che, se una dimostrazione aperta $\mathscr{D}$ espressa in $\mathscr{L}$ è $\mathscr{S}$-valida, allora tutti i suoi $\mathscr{S}$-casi devono essere $\mathscr{S}$-validi. Se si ammette ciò, le clausole (v') e (vi') possono essere sostituite con le clausole:

(v'') una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A \rightarrow B$ è data da una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di B, con una classe di assunzioni aperte (A);

(vi'') una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $\forall x A(x)$ è data da una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di $A(a)$, con una variabile individuale libera aperta a.

Si intende che la dimostrazione di B di cui in (v'') è aperta solo perché contiene (A), e che la dimostrazione di $A(a)$ di cui in (vi'') è aperta solo perché contiene a.

5. *Forma canonica delle dimostrazioni*

Le condizioni (i')-(vii') precedenti [con le varianti (v'') e (vi'')] non costituiscono una definizione della nozione di dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida senza una adeguata precisazione del significato dell'espressione « è data da » che compare in esse. In prima approssimazione tale espressione può essere interpretata come « consiste in » nel caso della clausola (i'), e come « è una dimostrazione che contiene come sottodimostrazione immediata » nel caso delle clausole (iii')-(vii'). Da tale punto di vista (i') stabilisce che una dimostrazione chiusa di un enunciato atomico P è $\mathscr{S}$-valida se e solo se appartiene a $\mathscr{S}$, mentre (iii')-(vii') stabiliscono che una dimostrazione chiusa di un enunciato della forma $A_1 \wedge A_2$,

$A_1 \vee A_2$, $A \rightarrow B$, $\forall x A(x)$ o $\exists x A(x)$ è $\mathscr{S}$-valida se e solo se è una dimostrazione della forma, rispettivamente:

$$(1)\ \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ A_1 & A_2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A_1 \wedge A_2} \end{array} \quad (2)\ \begin{array}{c} \vdots \\ A_i \\ \hline A_1 \vee A_2 \end{array}\ (i = 1,\ 2) \quad (3)\ \begin{array}{c} [(A)] \\ \vdots \\ B \\ \hline A \rightarrow B \end{array}$$

$$(4)\ \begin{array}{c} \vdots \\ A(a) \\ \hline \forall x A(x) \end{array}\ (a) \quad (5)\ \begin{array}{c} \vdots \\ A(t) \\ \hline \exists x A(x) \end{array}$$

le cui sottodimostrazioni immediate sono $\mathscr{S}$-valide. Poiché tali sottodimostrazioni immediate possono essere delle dimostrazioni aperte, ciò presuppone ovviamente che la nozione di dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida sia definita in modo che, se una dimostrazione aperta è $\mathscr{S}$-valida, tutti i suoi $\mathscr{S}$-casi sono $\mathscr{S}$-validi.

Una dimostrazione chiusa di una delle forme (1)-(5) si dice in *forma canonica,* o piú semplicemente si dice una *dimostrazione canonica,* e la sua inferenza finale si dice un'*inferenza canonica.* Quindi una dimostrazione chiusa di un enunciato non atomico è $\mathscr{S}$-valida se e solo se è una dimostrazione canonica tutte le cui sottodimostrazioni immediate sono $\mathscr{S}$-valide.

Questa precisazione del significato dell'espressione « è data da », però, è chiaramente inadeguata, poiché è facile dare esempi di dimostrazioni chiuse, ovviamente corrette ma non $\mathscr{S}$-valide. Tale è il caso di una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di B, che si ottiene applicando la regola ($\rightarrow$ E) già considerata nel § 2 ad una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}_1$ di A e ad una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}_2$ di $A \rightarrow B$. Per risolvere questa difficoltà consideriamo il modo in cui si stabilisce che, se due enunciati A e $A \rightarrow B$ sono $\mathscr{M}$-veri, anche

B è $\mathscr{M}$-vero. Evidentemente si fa uso della clausola (v) della definizione della $\mathscr{M}$-verità, in base a cui per l'ipotesi che $A \rightarrow B$ è $\mathscr{M}$-vero si ha che, se A è $\mathscr{M}$-vero, anche B è $\mathscr{M}$-vero. Poiché A è $\mathscr{M}$-vero, si conclude che B è $\mathscr{M}$-vero.

Analogamente nel nostro caso facciamo uso della clausola (v') della definizione della $\mathscr{S}$-validità, interpretata nel modo già indicato. Poiché $\mathscr{D}_2$ è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A \rightarrow B$, si ha che $\mathscr{D}_2$ deve contenere come sottodimostrazione immediata una dimostrazione aperta di B con una classe di assunzioni aperte (A), che si trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di B quando ogni assunzione appartenente ad (A) viene sostituita con una dimostrazione chiusa chiusa $\mathscr{S}$-valida di A. Ora $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione di questo tipo, quindi sostituendo ogni assunzione appartenente ad (A) con $\mathscr{D}_1$ si ottiene una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di B.

6. *Operazioni di convalida*

L'argomentazione precedente, che permette di giustificare la $\mathscr{S}$-validità di $\mathscr{D}$ a partire dalla $\mathscr{S}$-validità di $\mathscr{D}_1$ e di $\mathscr{D}_2$, costituisce la *$\mathscr{S}$-convalida* di $\mathscr{D}$. La $\mathscr{S}$-convalida di una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di B le cui sottodimostrazioni immediate $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$ sono delle dimostrazioni chiuse $\mathscr{S}$-valide di A e di $A \rightarrow B$ rispettivamente, può essere rappresentata da un'operazione $\Phi_{\rightarrow}$ che applicata a $\mathscr{D}$, la quale in base alla clausola (v') per $\mathscr{D}_2$ ha la forma indicata a sinistra, la trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}'$ della forma indicata a destra:

$$\Phi_{\rightarrow}:\ \begin{array}{cc} & [(A)] \\ & \vdots \\ \vdots & B \\ \vdots & \overline{A \rightarrow B} \\ A & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{B} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ (A) \\ \vdots \\ B \end{array}$$

$$\vdots$$

(Si intende che (A) è il risultato della sostituzione di ogni

$$\begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array} \qquad (A)$$

membro di (A) con $\mathscr{D}_1$ nella sottodimostrazione aperta $\begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array}$ di $\mathscr{D}$.)

È facile dare altri esempi di dimostrazioni chiuse che possono essere $\mathscr{S}$-convalidate. Consideriamo la dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di A_i che si ottiene applicando la regola:

$$(\wedge\, E_i)\ \frac{A_1 \wedge A_2}{A_i}\ (i = 1,\ 2)$$

ad una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}_1$ di $A_1 \wedge A_2$. La $\mathscr{S}$-convalida di $\mathscr{D}$ è rappresentata da un'operazione $\Phi_\wedge$ che applicata a $\mathscr{D}$, la quale in base alla clausola (*iii'*) per $\mathscr{D}_1$ ha la forma indicata a sinistra, la trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}$' della forma indicata a destra:

$$\Phi_\wedge : \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ A_1 & A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2}}{A_i} \qquad\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A_i\end{array}$$

Consideriamo la dimosrazione chiusa $\mathscr{D}$ di B che si ottiene applicando la regola:

$$(\vee\ \mathrm{E})\ \frac{A_1 \vee A_2 \qquad \begin{array}{c}[(A_1)]\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[(A_2)]\\ B\end{array}}{B}$$

ad una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}_1$ di $A_1 \vee A_2$, ad una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}_2$ di B con una classe di assunzioni aperte (A_1), e ad una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}_3$ di B con una classe di assunzioni aperte (A_2). (Si intende che $\mathscr{D}_2$ e $\mathscr{D}_3$ sono aperte solo perché contengono (A_1) e (A_2), rispettivamente.) La $\mathscr{S}$-convalida di $\mathscr{D}$ è rappresentata da una operazione $\Phi_\vee$ che applicata a $\mathscr{D}$, la quale in base alla clausola (*iv'*) per $\mathscr{D}_1$ ha la forma indicata a sinistra, la trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}$' della forma indicata a destra:

$$\Phi_\vee : \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A_i\end{array}}{A_1 \vee A_2} \qquad \begin{array}{c}[(A_1)]\\ \vdots\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[(A_2)]\\ \vdots\\ B\end{array}}{B} \qquad\qquad \begin{array}{c}\vdots\\ (A_i)\\ \vdots\\ B\end{array}$$

Consideriamo la dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di $A(t)$ che si ottiene applicando la regola:

$$(\forall \mathrm{E})\ \frac{\forall\, x\, A(x)}{A(t)}$$

ad una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}_1$ di $\forall\, x\, A(x)$. La $\mathscr{S}$-convalida di $\mathscr{D}$ è rappresentata da un'operazione $\Phi_\forall$ che applicata a $\mathscr{D}$, la quale in base alla clausola (*vi'*) per $\mathscr{D}_1$ ha la forma indicata a sinistra, la trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}$' della forma indicata a destra:

$$\Phi_\forall: \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \cdot\ (a) \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{A(a)}{\forall x\, A(x)}\ (a)}{A(t)} \\ \vdots \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \cdot\ (t) \\ \vdots \\ A(t) \end{array}$$

(Si intende che $\begin{array}{c} \cdot\ (t) \\ \vdots \\ A(t) \end{array}$ è il risultato della sostituzione di ogni occorrenza di a nella sottodimostrazione aperta $\begin{array}{c} \vdots \\ \cdot\ (a) \\ \vdots \\ A(a) \end{array}$ di $\mathscr{D}$ con un'occorrenza di t, dove (a) sta ad indicare tutte le occorrenze di a in $\begin{array}{c} \vdots \\ \cdot \\ \vdots \\ A(a) \end{array}$.)

Consideriamo infine la dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di B che si ottiene applicando la regola:

$$(\exists\ \mathrm{E})\ \frac{\exists x\, A(x) \qquad \begin{array}{c} [(A(a))] \\ B \end{array}}{B}\ (a)$$

ad una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-vailda $\mathscr{D}_1$ di $\exists x \forall (x)$ e ad una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}_2$ di B con una classe di assunzioni aperte $(A(a))$. [Si intende che $\mathscr{D}_2$ è aperta solo perché contiene $(A(a))$ e a]. La $\mathscr{S}$-convalida di $\mathscr{D}$ è rappresentata da un'operazione $\Phi_\exists$ che applicata a $\mathscr{D}$, la quale in base alla clausola (*vii'*) per $\mathscr{D}_1$ ha la forma indicata a sinistra, la trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}$' della forma indicata a destra:

$$\Phi_\exists: \quad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \dfrac{A(t)}{\exists x\, A(x)} \end{array} \qquad \begin{array}{c} [(A(a))] \\ \vdots \\ \cdot\ (a) \\ \vdots \\ B \end{array}}{B}\ (a) \qquad\qquad \begin{array}{c} \vdots \\ (A(a)) \\ \vdots \\ \cdot\ (t) \\ \cdot \\ B \end{array}$$

Le operazioni $\Phi_\wedge$, $\Phi_\vee$, $\Phi_\rightarrow$, $\Phi_\forall$, $\Phi_\exists$ sopra definite si dicono *operazioni di $\mathscr{S}$-convalida*. In generale un'operazione di $\mathscr{S}$-convalida è un'operazione che permette di trasformare una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ la cui inferenza finale non è un'inferenza canonica e le cui sottodimostrazioni immediate sono $\mathscr{S}$-valide, in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}$'.

Le operazioni di $\mathscr{S}$-convalida costituiscono una parte integrante delle dimostrazioni, cioè per ogni dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ la cui inferenza finale non è un'inferenza canonica dev'essere specificata un'operazione di $\mathscr{S}$-convalida. Una dimostrazione che non soddisfa questo requisito, semplicemente non può essere considerata una dimostrazione. Analogamente per ogni dimostrazione aperta $\mathscr{D}$ tale che l'inferenza finale dei suoi $\mathscr{S}$-casi non è un'inferenza canonica, dev'essere specificata un'operazione di $\mathscr{S}$-convalida di tali $\mathscr{S}$-casi.

Il fatto che una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ si trasformi in una dimostrazione $\mathscr{D}'$ con un'applicazione di un'operazione di $\mathscr{S}$-convalida, viene espresso dicendo che $\mathscr{D}$ *si riduce immediatamente* a $\mathscr{D}'$. Analogamente il fatto che una dimostrazione aperta $\mathscr{D}$ sia tale che ogni $\mathscr{S}$-caso di $\mathscr{D}$ si trasforma nello $\mathscr{S}$-caso « corrispondente » di una dimostrazione $\mathscr{D}'$ (cioè nello $\mathscr{S}$-caso che si ottiene da $\mathscr{D}'$ effettuando le stesse sostituzioni che in $\mathscr{D}$) con un'applicazione di un'operazione di $\mathscr{S}$-convalida, viene espresso dicendo che $\mathscr{D}$ si riduce immediatamente a $\mathscr{D}'$. Piú in generale si dice che una dimostrazione che contiene come sottodimostrazione una dimostrazione $\mathscr{D}$ che si riduce immediatamente (nel senso ora definito) a $\mathscr{D}'$, si riduce immediatamente alla dimostrazione che da essa si ottiene sostituendo $\mathscr{D}$ con $\mathscr{D}'$.

Una successione di dimostrazioni $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$ $(n \geqslant 1)$, tale che per ogni i, $1 \leqslant i < n$, $\mathscr{D}_i$ si riduce immediatamente a $\mathscr{D}_{i+1}$, si dice una *successione di riduzioni* che inizia con $\mathscr{D}_1$ e termina con $\mathscr{D}_n$. Diciamo che una dimostrazione $\mathscr{D}$ *si riduce* ad una dimostrazione $\mathscr{D}'$ se e solo se esiste una successione di riduzioni che inizia con $\mathscr{D}$ e termina con $\mathscr{D}'$. La relazione « $\mathscr{D}$ si riduce a $\mathscr{D}'$ », ovviamente è riflessiva e transitiva.

7. *Dimostrazione valida*

Siamo ora in grado di risolvere la difficoltà incontrata nel § 5. Tale difficoltà nasceva dal fatto che, interpretando nelle clausole (*i'*)-(*vii'*) l'espressione « è data da » nel modo ivi indicato, la dimostrazione chiusa di B che si ottiene applicando ($\rightarrow$ E) alle dimostrazioni chiuse $\mathscr{S}$-valide $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$ di A e $A \rightarrow B$ rispettivamente, non era $\mathscr{S}$-valida in base alla nozione di $\mathscr{S}$-validità risultante.

La soluzione consiste nell'interpretare l'espressione « è data da » come « si riduce a » nel caso della clausola (*i'*), e come « si riduce ad una dimostrazione che contiene come sottodimostrazione immediata » nel caso delle clausole (*iii'*)-(*vii'*). Ovviamente, nella formulazione delle operazioni di $\mathscr{S}$-convalida del § 6, l'espressione « ha la forma indicata a

sinistra » dev'essere sostituita con l'espressione « si riduce ad una dimostrazione della forma indicata a sinistra ».

Piú in generale, se $\mathscr{D}$ è una dimostrazione chiusa di un enunciato A, la $\mathscr{S}$-validità di $\mathscr{D}$ è definita, al solito per induzione sul numero delle costanti logiche (diverse da $\perp$) che occorrono in A, mediante le seguenti clausole:

(*j*) $\mathscr{D}$ è una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida di un enunciato atomico P se e solo se $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione di P appartenente a $\mathscr{S}$;

(*jj*) $\mathscr{S}$ non contiene alcuna dimostrazione di $\perp$;

(*jjj*) $\mathscr{D}$ è una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida di $A_1 \wedge A_2$ se e solo se $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione di $A_1 \wedge A_2$ le cui sottodimostrazioni immediate $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$ sono delle dimostrazioni chiuse $\mathscr{S}$-valide di A_1 e A_2, rispettivamente:

(*jv*) $\mathscr{D}$ è una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida di $A_1 \vee A_2$ se e solo se $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione di $A_1 \vee A_2$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}_i$ è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di A_i $(i = 1, 2)$;

(*v*) $\mathscr{D}$ è una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida di $A \rightarrow B$ se e solo se $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione di $A \rightarrow B$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione aperta di B con una classe di assunzioni aperte (A), che si trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di B quando ogni assunzione appartenente ad (A) viene sostituita con una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di A;

(*vj*) $\mathscr{D}$ è una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida di $\forall x A(x)$ se e solo se $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione di $\forall x A(x)$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione aperta di $A(a)$ con una variabile individuale libera aperta a, che si trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A(t)$ quando a viene sostituita con t, per ogni nome t;

(*vjj*) $\mathscr{D}$ è una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida di $\exists x A(x)$ se e solo se $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione di $\exists x A(x)$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $A(t)$, per qualche nome t.

In base alle indicazioni fornite dalla definizione della $\mathscr{M}$-verità di una formula $A(a_1, \ldots, a_n)$ le cui uniche variabili individuali libere sono $a_1, \ldots, a_n$, la nozione di $\mathscr{S}$-validità può essere estesa facilmente alle dimostrazioni aperte. Diciamo che una dimostrazione aperta $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}$-valida se e solo se tutti gli $\mathscr{S}$-casi di $\mathscr{D}$ sono $\mathscr{S}$-validi. In tal modo viene soddisfatto banalmente il requisito sulle dimostrazioni aperte $\mathscr{S}$-valide indicato alla fine del § 4. Inoltre le clausole (v) e (vj) possono essere sostituite con le clausole:

(v') $\mathscr{D}$ è una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida di $A \to B$ se e solo se $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione di $A \to B$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di B, con una classe di assunzioni aperte (A);

(vj') $\mathscr{D}$ è una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida di $\forall x A(x)$ se e solo se $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione di $\forall x A(x)$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di $A(a)$, con una variabile individuale libera aperta a.

Si intende che la dimostrazione $\mathscr{D}_1$ di cui in (v') e (vj') è aperta solo perché contiene (A) e a, rispettivamente.

È chiaro che la nozione di dimostrazione $\mathscr{S}$-valida cosí definita ha le seguenti proprietà:

(**A**) una dimostrazione $\mathscr{D}$ la cui inferenza finale è una inferenza canonica, e le cui sottodimostrazioni immediate sono $\mathscr{S}$-valide, è $\mathscr{S}$-valida;

(**B**) una dimostrazione $\mathscr{D}$ che si riduce ad una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}'$, è $\mathscr{S}$-valida.

(**A**) segue immediatamente dalle clausole (iii)-(vjj), mentre (**B**) richiede in piú la transitività della relazione « $\mathscr{D}$ si riduce a $\mathscr{D}'$ ».

Sebbene la $\mathscr{S}$-validità sia relativa ad una $\mathscr{S}$ fissata, si può definire una nozione di validità piú forte, che non dipende da alcuna $\mathscr{S}$. La situazione è del tutto analoga a quella che si ha nel caso della $\mathscr{M}$-verità, dove si stabilisce che una formula A di $\mathscr{L}$ è *vera* (*in senso insiemistico*) se e solo se A è

$\mathscr{M}$-vera, per ogni struttura insiemistica $\mathscr{M}$ per $\mathscr{L}$. Nel nostro caso diciamo che una dimostrazione $\mathscr{D}$ espressa in $\mathscr{L}$ è *valida* se e solo se $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}$-valida, per ogni classe $\mathscr{S}$ di dimostrazioni chiuse che constano solo di enunciati atomici.

8. *Regola valida*

Dopo aver definito la nozione di dimostrazione valida, introduciamo quella di *regola valida*, cioè di regola che conserva la validità delle dimostrazioni. Sia $\mathscr{R}$ una regola della forma:

$$\frac{A_1 \; \ldots \; A_n}{A} \, .$$

Diciamo che $\mathscr{R}$ è *$\mathscr{S}$-valida* se e solo se la dimostrazione $\mathscr{D}$ di A che si ottiene applicando $\mathscr{R}$ a delle dimostrazioni $\mathscr{S}$-valide $\mathscr{D}_i$ di A_i, per ogni i, $1 \leqslant i \leqslant n$, è $\mathscr{S}$-valida. Diciamo che $\mathscr{R}$ è *valida* se e solo se $\mathscr{R}$ è $\mathscr{S}$-valida, per ogni classe $\mathscr{S}$ di dimostrazioni chiuse che constano solo di enunciati atomici.

È chiaro che le seguenti regole, che danno luogo a delle inferenze canoniche, sono valide:

$$(\wedge \mathrm{I})\ \frac{A_1 \quad A_2}{A_1 \wedge A_2} \quad (\vee \mathrm{I})\ \frac{A_i}{A_1 \vee A_2}\ (i = 1, 2) \quad (\to \mathrm{I})\ \frac{\begin{matrix}[(A)]\\ B\end{matrix}}{A \to B}$$

$$(\forall \mathrm{I})\ \frac{A(a)}{\forall x A(x)}\ (a) \quad (\exists \mathrm{I})\ \frac{A(t)}{\exists x A(x)} \, .$$

Per esempio nel caso di ($\forall$I) per una $\mathscr{S}$ qualsiasi, sia $\mathscr{D}_1$ una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di $A(a)$, con una variabile individuale libera aperta a. Per semplicità supponiamo che a sia l'unica variabile individuale libera aperta che occorre in $\mathscr{D}_1$. Chiamiamo $\mathscr{D}$ la dimostrazione chiusa di $\forall x A(x)$

che si ottiene applicando ($\forall$ I) a $\mathscr{D}_1$. In base alla proprietà (**A**) del § 7, dal fatto che $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}$-valida segue che anche $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}$-valida. Poiché ciò è stato mostrato per una $\mathscr{S}$ qualsiasi, si ha che ($\forall$ I) è valida.

Analogamente, è chiaro che le regole ($\wedge$ E), ($\vee$ E_i), ($\rightarrow$ E), ($\forall$ E), ($\exists$ E) del § 6 sono valide. Per esempio nel caso di ($\rightarrow$ E), per una $\mathscr{S}$ qualsiasi, siano $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$ delle dimostrazioni $\mathscr{S}$-valide di A e di $A \rightarrow B$, rispettivamente. Per semplicità supponiamo che $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$ siano chiuse. Chiamiamo $\mathscr{D}$ la dimostrazione chiusa di B che si ottiene applicando ($\rightarrow$ E) a $\mathscr{D}_1$ e a $\mathscr{D}_2$. Poiché $\mathscr{D}_2$ è $\mathscr{S}$-valida, per la clausola (v') del § 7 $\mathscr{D}_2$ si riduce ad una dimostrazione $\mathscr{D}'_2$ di $A \rightarrow B$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}'_3$ è una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di B, con una classe di assunzioni aperte (A). Ora $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}$-valida, quindi per definizione lo $\mathscr{S}$-caso $\mathscr{D}''_3$ di $\mathscr{D}'_3$ che si ottiene sostituendo ogni assunzione appartenente ad (A) con $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di B.

Poiché $\mathscr{D}_2$ si riduce a $\mathscr{D}'_2$, $\mathscr{D}$ si riduce alla dimostrazione $\mathscr{D}'$ che si ottiene da $\mathscr{D}$ sostituendo $\mathscr{D}_2$ con $\mathscr{D}'_2$. A sua volta $\mathscr{D}'$ si riduce immediatamente a $\mathscr{D}''_3$ con un'applicazione dell'operazione di $\mathscr{S}$-convalida $\Phi_\rightarrow$. Perciò per la transitività della relazione «$\mathscr{D}$ si riduce a $\mathscr{D}'$», si ha che $\mathscr{D}$ si riduce a $\mathscr{D}''_3$. Poiché $\mathscr{D}''_3$ è $\mathscr{S}$-valida, per la proprietà (**B**) del § 7 da ciò segue che anche $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}$-valida. Questo è stato mostrato per una $\mathscr{S}$ qualsiasi, quindi ($\rightarrow$ E) è valida.

Come ulteriore esempio, consideriamo la regola:

$$(\bot_I)\ \frac{\bot}{P}$$

dove P è una formula atomica diversa da $\bot$. È chiaro che, per una $\mathscr{S}$ qualsiasi, non esiste alcuna dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $\bot$. Infatti, supponiamo che esista una tale dimostrazione, diciamo $\mathscr{D}_1$. Per la clausola (j) del § 7 $\mathscr{D}_1$ si riduce ad una dimostrazione $\mathscr{D}'_1$ di $\bot$ appartenente a $\mathscr{S}$. Ma per la clausola (jj) *del* § 7 $\mathscr{S}$ non contiene alcuna dimostrazione di $\bot$. Si ottiene cosí una contraddizione. Da ciò segue che la $\mathscr{S}$-convalida di una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di P che si ottiene applicando $(\bot_I)$ ad una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}_1$ di $\bot$ dev'essere rappresentata dall'applicazione vuota $\Phi_\varnothing$.

È immediato che $(\bot_I)$ è valida. Infatti, per una $\mathscr{S}$ qualsiasi, poiché non esiste alcuna dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $\bot$, si ha banalmente che se $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida di $\bot$, allora la dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di P che si ottiene applicando $(\bot_I)$ a $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}$-valida.

Piú in generale, consideriamo la regola:

$$\begin{array}{c}[(\neg P)] \\ \\ (\bot_C)\ \dfrac{\bot}{P}\end{array}$$

dove P è una formula atomica diversa da $\bot$. Anche qui, è chiaro che, per una $\mathscr{S}$ qualsiasi, non esiste alcuna dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di $\bot$, con una classe di assunzioni aperte $(\neg P)$. Infatti, supponiamo che esista una tale dimostrazione, diciamo $\mathscr{D}_1$. Poiché $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}$-valida, se $\mathscr{D}'_1$ è un $\mathscr{S}$-caso di $\mathscr{D}_1$, per la clausola (j) del § 7 $\mathscr{D}'_1$ si riduce ad una dimostrazione $\mathscr{D}''_1$ di $\bot$ appartenente a $\mathscr{S}$. Ma per la clausola (jj) del § 7 $\mathscr{S}$ non contiene alcuna dimostrazione di $\bot$. Si ottiene cosí una contraddizione. Da ciò segue che la $\mathscr{S}$-convalida di una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di P che si ottiene applicando $(\bot_C)$ ad una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di $\bot$, con una classe di assunzioni aperte $(\neg P)$, dev'essere rappresentata dall'applicazione vuota $\Phi_\varnothing$.

È immediato che $(\bot_C)$ è valida. Infatti, per una $\mathscr{S}$ qualsiasi, poiché non esiste alcuna dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di $\bot$, con una classe di assunzioni aperte $(\neg P)$, si ha banalmente che se $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione aperta $\mathscr{S}$-valida di $\bot$, con una classe di assunzioni aperte $(\neg P)$, allora la dimostrazione chiusa di P che si ottiene applicando $(\bot_C)$ a $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}$-valida.

9. *Sistemi di deduzione naturale*

La nozione di dimostrazione qui adoperata si differenzia da quella di dimostrazione formale del § 2 poiché le dimostrazioni non vengono considerate come generate mediante delle regole prefissate. Consideriamo ora invece delle dimostrazioni generate mediante sistemi fissati di regole, detti *sistemi di deduzione naturale*, che si distinguono per il fatto che, mentre non è subito chiaro se le dimostrazioni formali generate, ad esempio, mediante le regole del calcolo logico di Frege sono valide, ciò è piú o meno immediato nel caso di tali sistemi. Per sottolineare che le dimostrazioni sono generate mediante delle regole prefissate, parleremo anche qui di *dimostrazioni formali.*

Ci limitiamo ad esaminare due sistemi di deduzione naturale fondamentali, il sistema di deduzione naturale **LI** per la *logica intuizionista,* e il sistema di deduzione naturale **LC** per la *logica classica.* Nel caso di **LI** i linguaggi del primo ordine considerati si intendono formulati come nel § 1. Le regole di **LI** comprendono le regole ($\wedge$ I), ($\vee$ I), ($\rightarrow$ I), ($\forall$ I), ($\exists$ I), dette *regole di introduzione,* e le regole ($\wedge$ E), ($\vee$ E_i), ($\rightarrow$ E), ($\forall$ E), ($\exists$ E), dette *regole di eliminazione.* A tali regole va aggiunta inoltre la regola ($\perp_I$). Nel caso di **LC** i linguaggi del primo ordine del § 1 si intendono modificati eliminando le costanti logiche $\vee$ e $\exists$ come simboli primitivi. Le formule $A \vee B$ e $\exists x A(x)$ vengono adoperate solo come abbreviazioni di $\neg A \rightarrow B$ e $\neg \forall x \neg A(x)$, rispettivamente. Le regole di **LC** sono le regole di introduzione, le regole di eliminazione (per le costanti logiche primitive), e la regola ($\perp_C$).

È facile mostrare la *correttezza* delle regole di **LI** e **LC** *rispetto alla nozione di dimostrazione valida,* cioè che ogni dimostrazione formale $\mathscr{D}$ generata mediante le regole di **LI** o **LC** è valida. La dimostrazione è per induzione sulla lunghezza di $\mathscr{D}$. Sia $\mathscr{S}$ una classe qualsiasi di dimostrazioni chiuse che constano solo di enunciati atomici. Se $\mathscr{D}$ ha un unico nodo A, allora $\mathscr{D}$ è una dimostrazione aperta, con una classe di assunzioni aperte (A) che consta di un'unica occorrenza di A.

Ovviamente il risultato della sostituzione di ogni variabile individuale libera aperta di $\mathscr{D}$ con un nome, e di ogni assunzione appartenente ad una classe di assunzioni aperte di $\mathscr{D}$ con una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida $\mathscr{D}'$, coincide con $\mathscr{D}'$, quindi è una dimostrazione $\mathscr{S}$-valida. Di conseguenza $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}$-valida. Se $\mathscr{D}$ ha piú nodi, allora l'inferenza finale di $\mathscr{D}$ è stata ottenuta mediante un'applicazione di una delle regole di **LI** o **LC**, e la $\mathscr{S}$-validità di $\mathscr{D}$ segue dall'ipotesi di induzione applicata alle sottodimostrazioni immediate di $\mathscr{D}$, facendo uso del fatto che, come si è visto nel § 8, tutte le regole di **LI** e **LC** sono valide, e quindi anche $\mathscr{S}$-valide. In ogni caso, dunque, $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}$-valida. Poiché ciò è stato mostrato per una $\mathscr{S}$ qualsiasi, si conclude che $\mathscr{D}$ è valida.

Si può considerare anche il problema inverso, cioè quello della *completezza* delle regole di **LI** e **LC** *rispetto alla nozione di dimostrazione valida.* Tale problema consiste nello stabilire se tutte le dimostrazioni valide possono essere scomposte in inferenze elementari, non ulteriormente analizzabili, che consistono in applicazioni delle regole di **LI** o **LC**. Per una soluzione affermativa del problema occorrerebbe mostrare che ogni regola valida non contenuta in **LI** né in **LC** è essenzialmente « piú complicata » delle regole di **LI** e **LC**. Un modo ragionevole di intendere ciò è che, mentre ogni inferenza che si ottiene mediante un'applicazione di una regola di **LI** o **LC** riguarda un'unica costante logica, in ogni altro tipo di inferenza il ruolo delle costanti logiche non viene isolato del tutto. (Cfr. [22] pp. 243-248.)

Se si accetta questa semplice interpretazione del significato di « piú complicata », allora l'evidenza a favore di una soluzione affermativa del problema è piú che abbondante. Per esempio, si consideri la dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ che si ottiene applicando la regola:

$$\frac{\forall x (A(x) \wedge B(x))}{\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)}$$

ad una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}_1$ di $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ generata mediante le regole di **LI** o **LC**. $\mathscr{D}$ può essere analizzata scomponendo la sua inferenza finale nelle seguenti inferenze piú elementari, ottenute mediante applicazioni delle regole di **LI** e **LC**, rispettivamente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall x(A(x) \wedge B(x))\end{array}}{A(a) \wedge B(a)}}{A(a)}}{\forall x A(x)}\,(a) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall x(A(x) \wedge B(x))\end{array}}{A(b) \wedge B(b)}}{B(b)}}{\forall x B(x)}\,(b)}{\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)}$$

Il ruolo di $\wedge$ e di $\forall$, che non appariva distinto nell'inferenza finale di $\mathscr{D}$, viene cosí isolato ed analizzato in termini di passi ciascuno dei quali si riferisce solo a $\wedge$ oppure solo a $\forall$.

Il problema della completezza rispetto alla nozione di dimostrazione valida acquista un nuovo significato alla luce di un risultato generale relativo alle dimostrazioni formali generate mediante le regole di **LI** o **LC**, il cosiddetto *teorema di normalizzazione*. Per formulare il teorema occorre introdurre qualche nozione. Diciamo che una dimostrazione formale $\mathscr{D}$ generata mediante le regole di **LI** o **LC** è *normale* se e solo se non esiste alcuna dimostrazione formale $\mathscr{D}$' tale che $\mathscr{D}$ si riduce immediatamente a $\mathscr{D}$', cioè se e solo se $\mathscr{D}$ si riduce solo a sé stessa. Diciamo che $\mathscr{D}$ è *normalizzabile* se e solo se esiste una dimostrazione normale $\mathscr{D}$' tale che $\mathscr{D}$ si riduce a $\mathscr{D}$'. Il teorema di normalizzazione stabilisce allora che ogni dimostrazione formale generata mediante le regole di **LI** o **LC** è normalizzabile.

In virtú del teorema, la completezza delle regole di **LI** o

LC rispetto alla nozione di dimostrazione valida implicherebbe che le dimostrazioni normali forniscono una rappresentazione di tutte le dimostrazioni valide, poiché queste una volta analizzate completamente consisterebbero di inferenze ottenute mediante applicazioni delle regole di **LI** o **LC**. Tale risultato può essere ulteriormente rafforzato, in base ad un'altra proprietà generale delle dimostrazioni formali generate mediante le regole di **LI** o **LC** la cosiddetta *proprietà di univocità*, che può essere enunciata nel modo seguente. Per ogni dimostrazione formale $\mathscr{D}$ generata mediante le regole di **LI** o **LC**, se $\mathscr{D}$ si riduce immediatamente a due dimostrazioni formali differenti $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$, allora esiste una dimostrazione formale $\mathscr{D}$' tale che sia $\mathscr{D}_1$ che $\mathscr{D}_2$ si riducono a $\mathscr{D}$'.

Dal teorema di normalizzazione e dalla proprietà di univocità segue facilmente che, per ogni dimostrazione formale $\mathscr{D}$ generata mediante le regole di **LI** o **LC**, esiste un'unica dimostrazione normale $\mathscr{D}$' tale che $\mathscr{D}$ si riduce a $\mathscr{D}$'. Di conseguenza la completezza delle regole di **LI** o **LC** rispetto alla nozione di dimostrazione valida implicherebbe che le dimostrazioni normali forniscono una *rappresentazione canonica* di tutte le dimostrazioni valide. In altri termini, le dimostrazioni normali avrebbero un ruolo privilegiato tra le dimostrazioni valide, nello stesso modo in cui la notazione posizionale ha un ruolo privilegiato tra tutti i sistemi di notazione per i numeri naturali.

10. *Regole non logiche*

Tutte le regole fin qui considerate sono *regole puramente logiche*, cioè regole relative all'uso delle costanti logiche. Si possono considerare però anche *regole non logiche*, cioè regole che riguardano l'uso delle costanti descrittive. Naturalmente tali regole, a differenza delle regole puramente logiche, non possono essere formulate per linguaggi del primo ordine qualsiasi, ma solo per particolari linguaggi del primo ordine. Inoltre esse in generale non sono valide, ma solo $\mathscr{S}$-valide, per certe particolari classi $\mathscr{S}$ di dimostrazioni chiuse che constano solo di enunciati atomici.

Illustriamo ciò con un esempio. Sia $\mathscr{L}_A$ il linguaggio del primo ordine le cui uniche costanti descrittive sono la costante individuale 0, la costante funzionale unaria S, la costante relazionale binaria E, e le costanti relazionali ternarie Ad e Mt. Scriviamo $t = u$ come abbreviazione di $E(t, u)$. Chiamiamo *struttura insiemistica principale* per $\mathscr{L}_A$ la struttura insiemistica $\mathscr{N} = \langle \mathscr{S}, \varphi \rangle$ per $\mathscr{L}_A$ tale che: (1) $\mathscr{S}$ è la struttura insiemistica $\langle \mathbf{M}, \{\mathbf{F}^n\}_n, \{\mathbf{R}^n\}_n \rangle$ in cui $\mathbf{M}$ è l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali, $\mathbf{F}^1$ contiene come unico elemento la funzione successore $\overline{S}$, e per ogni $n \neq 1$ l'insieme $\mathbf{F}^n$ è vuoto, $\mathbf{R}^2$ contiene come unico elemento la relazione di eguaglianza $=$, $\mathbf{R}^3$ contiene come unici elementi il grafico dell'addizione $\overline{Ad}$ e il grafico della moltiplicazione $\overline{Mt}$, e per ogni $n \neq 2,3$ l'insieme $\mathbf{R}^n$ è vuoto; (2) φ è l'applicazione che associa lo zero alla costante individuale 0, la funzione $\overline{S}$ alla costante funzionale unaria S, la relazione $=$ alla costante relazionale binaria E, e le relazioni $\overline{Ad}$ e $\overline{Mt}$ alle costanti relazionali ternarie Ad e Mt, rispettivamente.

I nomi di $\mathscr{L}_A$ sono le espressioni $0, S(0), S(S(0)), \ldots, S^n(0) = \underbrace{S(S(\ldots S}_{n}(0)\ldots)), \ldots$. L'estensione φ * di φ che associa un elemento di $\mathbf{N}$ ad ogni nome, è un'applicazione *su* $\mathbf{N}$ che assegna n a $S^n(0)$, per ogni numero naturale n. Quindi nel caso di $\mathscr{L}_A$ si ha che $\mathscr{L}_A(\mathscr{N})_* = \mathscr{L}_A$.

Sia $\mathscr{S}_A$ una classe di dimostrazioni che contiene, per ogni enunciato atomico $\mathscr{N}$-vero P, una dimostrazione chiusa di P che consta solo di enunciati atomici. Si suppone che $\mathscr{S}_A$ contenga solo dimostrazioni di questo tipo. È facile dare un esempio di una classe $\mathscr{S}_A$ con queste proprietà.

Consideriamo le regole:

$(A_1)\quad t = t$

$$(A_2)\quad \frac{t = u}{u = t}$$

$$(A_3)\quad \frac{t = u \quad u = v}{t = v}$$

$$(A_4)\quad \frac{t = u}{S(t) = S(u)}$$

$$(A_5)\quad \frac{t = t' \quad Ad(t, u, v)}{Ad(t', u, v)}$$

$$(A_6)\quad \frac{u = u' \quad Ad(t, u, v)}{Ad(t, u', v)}$$

$$(A_7)\quad \frac{v = v' \quad Ad(t, u, v)}{Ad(t, u, v')}$$

$$(A_8)\quad \frac{t = t' \quad Mt(t, u, v)}{Mt(t', u, v)}$$

$$(A_9)\quad \frac{u = u' \quad Mt(t, u, v)}{Mt(t, u', v)}$$

$$(A_{10})\quad \frac{v = v' \quad Mt(t, u, v)}{Mt(t, u, v')}$$

$$(A_{11})\quad \frac{S(t) = 0}{\perp}$$

$$(A_{12})\quad \frac{S(t) = S(u)}{t = u}$$

(A_{13}) $Ad(t, 0, t)$

$$(A_{14})\ \frac{Ad(t, u, v)}{Ad(t, S(u), S(v))}$$

$$(A_{15})\ \frac{Ad(t, u, v) \quad Ad(t, u, v')}{v = v'}$$

(A_{16}) $Mt(t, 0, 0)$

$$(A_{17})\ \frac{Mt(t, u, v) \quad Ad(v, t, z)}{Mt(t, S(u), z)}$$

$$(A_{18})\ \frac{Mt(t, u, v) \quad Mt(t, u, v')}{v = v'}.$$

È chiaro che non esiste alcuna dimostrazione chiusa $\mathscr{S}_A$-valida di $S(t) = 0$. Infatti, supponiamo che esista una tale dimostrazione,, diciamo $\mathscr{D}_1$. Poiché $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}_A$-valida, per la clausola (*j*) del § 7 essa si riduce ad una dimostrazione $\mathscr{D}_1'$ di $S(t) = 0$ appartenente a $\mathscr{S}_A$. Ma allora $S(t) = 0$ è $\mathscr{N}$-vero, per la scelta di $\mathscr{S}_A$ D'altra parte ovviamente $S(t) = 0$ non può essere $\mathscr{N}$-vero. Si ottiene cosí una contraddizione. Da ciò segue che la $\mathscr{S}_A$-convalida di una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di $\perp$ che si ottiene applicando (A_{11}) ad una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}_A$-valida di $S(t) = 0$ dev'essere rappresentata dall'applicazione vuota $\Phi_\varnothing$.

Supponiamo data un'enumerazione di $\mathscr{S}_A$. Se $\mathscr{D}$ è una dimostrazione chiusa di un enunciato atomico P, che si ottiene applicando una regola (A_i), dove $1 \leqslant i \leqslant 18$ e $i \neq 11$, a delle dimostrazioni chiuse $\mathscr{S}_A$-valide di enunciati atomici della forma richiesta dalla regola, la $\mathscr{S}_A$-convalida di $\mathscr{D}$ è rappresentata da un'operazione Φ_{A_i} che applicata a $\mathscr{D}$ la trasforma nella prima dimostrazione di P appartenente a $\mathscr{S}_A$, nella data enumerazione di $\mathscr{S}_A$.

Si vede facilmente che le regole (A_1) - (A_{18}) sono $\mathscr{S}_A$-valide. Ciò è immediato nel caso di (A_{11}). Infatti, poiché non esiste alcuna dimostrazione chiusa $\mathscr{S}_A$-valida di $S(t) = 0$, si ha banalmente che se $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}_A$-valida di $S(t) = 0$, allora la dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di $\perp$ che si ottiene applicando (A_{11}) a $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}_A$-valida.

Come ulteriore esempio, consideriamo (A_{12}). Sia $\mathscr{D}_1$ una dimostrazione $\mathscr{S}_A$-valida di $S(t) = S(u)$. Per semplicità supponiamo che $\mathscr{D}_1$ sia chiusa. Chiamiamo $\mathscr{D}$ la dimostrazione chiusa di $t = u$ che si ottiene applicando (A_{12}) a $\mathscr{D}_1$. Poiché $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}_A$-valida, per la clausola (*j*) del § 7 essa si riduce ad una dimostrazione $\mathscr{D}_1'$ di $S(t) = S(u)$ appartenente a $\mathscr{S}_A$. Perciò, per la scelta di $\mathscr{S}_A$, $S(t) = S(u)$ è $\mathscr{N}$-vero. Quindi per la clausola (*i*) del § 4 si ha che $\varphi^*(S(t)) = \varphi^*(S(u))$, da cui per la definizione di φ^* segue che $\bar{S}(\varphi^*(t)) = \bar{S}(\varphi^*(u))$ Ciò implica che $\varphi^*(t) = \varphi^*(u)$. Perciò per la clausola (*i*) del § 4 anche $t = u$ è $\mathscr{N}$-vero. Di conseguenza, per la scelta di $\mathscr{S}_A$, deve esistere qualche dimostrazione di $t = u$ appartenente a $\mathscr{S}_A$. Sia $\mathscr{D}'$ la prima di tali dimostrazioni, nella data enumerazione di $\mathscr{S}_A$. $\mathscr{D}$ si riduce a $\mathscr{D}'$ con un'applicazione dell'operazione di $\mathscr{S}_A$-*convalida* $\Phi_{A_{12}}$. Quindi per la clausola (*j*) del § 7 $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}_A$-valida.

Mostriamo ora che la classe $\mathscr{S}$ delle dimostrazioni chiuse generate mediante le regole (A_1) - (A_{18}) soddisfa le condizioni su $\mathscr{S}_A$. Dobbiamo far vedere che, per ogni enunciato atomico P, P è $\mathscr{N}$-vero se e solo se esiste una dimostrazione di P appartenente a $\mathscr{S}$. La parte « se » può essere verificata facilmente mostrando che le regole (A_1), (A_{13}) e (A_{16}) permettono di introdurre solo enunciati $\mathscr{N}$-veri, e che le rimanenti regole (A_2) - (A_{12}), (A_{14}), (A_{15}), (A_{17}), e (A_{18}) conducono da enunciati $\mathscr{N}$-veri ad enunciati $\mathscr{N}$-veri. Facciamo vedere che vale la parte « solo se ». Supponiamo che P sia $\mathscr{N}$-vero. Dobbiamo considerare tre casi, a seconda della forma di P. [Il caso che P sia $\perp$ è escluso, per la clausola (*ii*) del § 4.]

Se P è $t = u$, poiché t è $S^m(0)$ e u è $S^n(0)$, per qualche m e n, e poiché per la clausola (i) del § 4 dall'ipotesi della $\mathcal{N}$-verità di $t = u$ segue che $\varphi^*(t) = \varphi^*(u)$, si ha che $m = n$. Perciò con un'applicazione di (A_1) si ottiene una dimostrazione di $t = u$.

Se P è $Ad\,(t, u, v)$, poiché t è $S^m(0)$, u è $S^n(0)$ e v è $S^p(0)$, per qualche m, n e p, e poiché per la clausola (i) del § 4 dall'ipotesi della $\mathcal{N}$-verità di $Ad\,(t, u, v)$ segue che $\langle\varphi^*(t), \varphi^*(u), \varphi^*(v)\rangle \in \overline{Ad}$, si ha che $m + n = p$. Quindi $Ad\,(t, u, v)$ è $Ad\,(S^m(0), S^n(0), S^{m+n}(0))$. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$, allora con un'applicazione di (A_{13}) si ottiene una dimostrazione di $Ad\,(S^m(0), 0, S^m(0))$, che non è altro che $Ad\,(S^m(0), S^n(0), S^{m+n}(0))$ con 0 al posto di n. Supponiamo che esista una dimostrazione di $Ad\,(S^m(0), S^n(0), S^{m+n}(0))$ appartenente a $\mathcal{S}$, diciamo $\mathcal{D}_1$. Applicando (A_{14}) a $\mathcal{D}_1$ si ottiene una dimostrazione di $Ad\,(S^m(0), S^{n+1}(0), S^{m+n+1}(0))$, che non è altro che $Ad\,(S^m(0), S^n(0), S^{m+n}(0))$ con $n + 1$ al posto di n.

Se P è $Mt\,(t, u, v)$, poiché t è $S^m(0)$, u è $S^n(0)$ e v è $S^p(0)$, per qualche m, n e p, e poiché per la clausola (i) del § 4 dall'ipotesi della $\mathcal{N}$-verità di $Mt\,(t, u, v)$ segue che $\langle\varphi^*(t), \varphi^*(u), \varphi^*(v)\rangle \in \overline{Mt}$, si ha che $m \cdot n = p$. Quindi $Mt\,(t, u, v)$ è $Mt\,(S^m(0), S^n(0), S^{m \cdot n}(0))$. Procediamo anche qui per induzione su n. Se $n = 0$, allora con un'applicazione di (A_{16}) si ottiene una dimostrazione di $Mt\,(S^m(0), 0, 0)$, che non è altro che $Mt\,(S^m(0), S^n(0), S^{m \cdot n}(0))$ con 0 al posto di n. Supponiamo che esista una dimostrazione di $Mt\,(S^m(0), S^n(0), S^{m \cdot n}(0))$ appartenente a $\mathcal{S}$, diciamo $\mathcal{D}_1$. Per quanto dimostrato nel caso precedente, c'è una dimostrazione di $Ad\,(S^{m \cdot n}(0), S^m(0), S^{m \cdot n + m}(0))$ appartenente a $\mathcal{S}$, diciamo $\mathcal{D}_2$. Applicando (A_{17}) a $\mathcal{D}_1$ e a $\mathcal{D}_2$ si ottiene una dimostrazione di $Mt\,(S^m(0), S^{n+1}(0), S^{m \cdot n + m}(0))$, che non è altro che $Mt\,(S^m(0), S^n(0), S^{m \cdot n}(0))$ con $n + 1$ al posto di n.

Le regole (A_1) - (A_{18}) costituiscono un esempio molto particolare di regole non logiche $\mathcal{S}_A$-valide. In effetti si tratta

di regole *atomiche*, cioè di regole che si applicano solo a formule atomiche e che permettono di ottenere solo formule atomiche. Si possono formulare facilmente però anche regole non logiche $\mathcal{S}_A$-valide che non sono soggette a questa restrizione. Un importante esempio è costituito dalla seguente regola, che sta alla base del procedimento di dimostrazione per induzione adoperato sopra:

$$
\begin{array}{c}
 \qquad [(A(a))] \\
(Ind)\ \dfrac{A(0) \qquad A(S(a))}{A(t)}\ (a)\ .
\end{array}
$$

Se $\mathcal{D}$ è una dimostrazione chiusa di $A(t)$ che si ottiene applicando (Ind) ad una dimostrazione chiusa $\mathcal{S}_A$-valida $\mathcal{D}_1$ di $A(0)$ e ad una dimostrazione aperta $\mathcal{S}_A$-valida $\mathcal{D}_2$ di $A(S(a))$ con una classe di assunzioni aperte $(A(a))$, la $\mathcal{S}_A$-convalida di $\mathcal{D}$ è rappresentata da un'operazione Φ_{Ind} che applicata a $\mathcal{D}$, la quale per costruzione ha la forma indicata a sinistra, la trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathcal{S}_A$-valida $\mathcal{D}'$ di una delle due forme indicate a destra, a seconda della forma di t:

$\boxed{t \text{ è } 0}$

$$
\Phi_{Ind}:\ \dfrac{\begin{array}{cc} & [(A(a))] \\ & \vdots \\ \vdots & \vdots\ (a) \\ A(0) & A(S(a)) \end{array}}{A(0)}\ (a) \qquad\qquad \begin{array}{c} \vdots \\ A(0) \end{array}
$$

$\boxed{t \text{ è } S(u)}$

$$\Phi_{Ind}: \quad \frac{A(0) \qquad \begin{array}{c} [(A(a))] \\ \vdots \\ \cdot\,(a) \\ \vdots \\ A(S(a)) \end{array}}{A(S(u))}\,(a) \qquad\qquad \frac{A(0) \qquad \begin{array}{c} [(A(a))] \\ \vdots \\ \cdot\,(a) \\ \vdots \\ A(S(a)) \end{array}}{\begin{array}{c} A(u) \\ \vdots \\ \cdot\,(u) \\ \vdots \\ A(S(u)) \end{array}}\,(a)$$

Facciamo vedere che la regola (*Ind*) è $\mathscr{S}_A$-valida. Siano $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$ delle dimostrazioni $\mathscr{S}_A$-valide di $A(0)$ e di $A(S(a))$, rispettivamente, dove $\mathscr{D}_2$ contiene una classe di assunzioni aperte $(A(a))$ Per semplicità supponiamo che $\mathscr{D}_1$ sia chiusa, e che $\mathscr{D}_2$ sia aperta solo perché contiene $(A(a))$ e a. Chiamiamo $\mathscr{D}$ la dimostrazione chiusa di $A(t)$ che si ottiene applicando (*Ind*) a $\mathscr{D}_1$ e a $\mathscr{D}_2$ Poiché $A(t)$ è un enunciato, t è $S^n(0)$, per qualche n. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$, allora $\mathscr{D}$ si riduce immediatamente a $\mathscr{D}_1$ con un'applicazione dell'operazione di $\mathscr{S}_A$-convalida Φ_{Ind}. Quindi, poiché $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}_A$-valida, per la proprietà (**B**) del § 7 si ha che anche $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}_A$-valida.

Supponiamo che il risultato valga per un numero naturale n. Sia $\mathscr{D}_3$ la dimostrazione chiusa di $A(S^n(0))$ che si ottiene con un'applicazione di (*Ind*) a $\mathscr{D}_1$ e a $\mathscr{D}_2$ che introduce nella conclusione il nome $S^n(0)$. Per l'ipotesi di induzione $\mathscr{D}_3$ è $\mathscr{S}_A$-valida. Perciò poiché $\mathscr{D}_2$ è $\mathscr{S}_A$-valida, lo $\mathscr{S}_A$-caso $\mathscr{D}'_2$ di $\mathscr{D}_2$ che si ottiene sostituendo la variabile individuale

libera a con $S^n(0)$, e sostituendo ogni assunzione $A(S^n(0))$ appartenente alla classe di assunzioni $(A(S^n(0)))$ cosí risultante da $(A(a))$, con $\mathscr{D}_3$, è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}_A$-valida di $A(S^{n+1}(0))$. Ora $\mathscr{D}$ si riduce immediatamente a $\mathscr{D}'_2$ con un'applicazione dell'operazione di $\mathscr{S}_A$-convalida Φ_{Ind}. Quindi, poiché $\mathscr{D}'_2$ è $\mathscr{S}_A$-valida, per la proprietà (**B**) del § 7 si ha che anche $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}_A$-valida.

Come nel § 9 sono stati considerati sistemi di regole puramente logiche che generano dimostrazioni formali la cui validità è piú o meno immediata, si possono formulare dei sistemi di regole logiche e non logiche che generano dimostrazioni formali di cui è facile verificare la $\mathscr{S}_A$-validità. Tali sistemi si dicono anch'essi *sistemi di deduzione naturale*.

I sistemi di deduzione naturale **LI** e **LC** del § 9 danno luogo abbastanza facilmente a due sistemi di questo tipo, il sistema di deduzione naturale **AI** per *l'aritmetica intuizionista*, e il sistema di deduzione naturale **AC** per *l'aritmetica classica*. Nel caso di **AI** il linguaggio $\mathscr{L}_A$ è formulato nel modo già indicato. Le regole di **AI** comprendono le regole di **LI**, le regole (A_1) - (A_{18}) e la regola (*Ind*). Nel caso di **AC** il linguaggio $\mathscr{L}_A$ viene modificato come precisato nel § 9 per **LC**. Le regole di **AC** comprendono le regole di **LC**, le regole (A_1) - (A_{18}) e la regola (*Ind*).

È facile vedere la *correttezza* delle regole di **AI** e **AC** *rispetto alla nozione di dimostrazione $\mathscr{S}_A$-valida,* cioè che ogni dimostrazione formale $\mathscr{D}$ generata mediante le regole di **AI** o **AC** è $\mathscr{S}_A$-valida. La dimostrazione, come nel caso di **LI**, e **LC**, è per induzione sulla lunghezza di $\mathscr{D}$, e fa uso del fatto che tutte le regole puramente logiche di **AI** e **AC** sono valide, quindi anche $\mathscr{S}_A$-valide, e che come si è visto sopra tutte le regole non logiche di **AI** e **AC** sono $\mathscr{S}_A$-valide. Si può formulare anche il problema inverso, cioè quello della *completezza* delle regole di **AI** e **AC** *rispetto alla nozione di dimostrazione $\mathscr{S}_A$-valida.* Si potrebbe pensare che le considerazioni già svolte nel caso di **LI** e **LC** si applichino anche qui. Tuttavia vi sono elementi per ritenere che una soluzione affermativa del problema sia meno plausibile in questo caso.

Le difficoltà riguardano soprattutto la regola (*Ind*). Finora le dimostrazioni sono state concepite come alberi *finitari*, cioè come alberi in cui ogni nodo non iniziale può avere solo un numero finito di ascendenti immediati. Se si lascia cadere questa restrizione, allora (*Ind*) può essere sostituita con la seguente regola, che dà luogo ad inferenze con infinite premesse:

$$(\omega)\ \frac{A(S^n(0)),\ \text{per ogni } n}{A(t)}\ .$$

Se $\mathscr{D}$ è una dimostrazione chiusa di $A(t)$ che si ottiene appicando (ω) a delle dimostrazioni chiuse $\mathscr{S}_A$-valide $\mathscr{D}_n$ di $A(S^n(0))$ per ogni n, la $\mathscr{S}_A$-convalida di $\mathscr{D}$ è rappresentata da un'operazione Φ_ω che applicata a $\mathscr{D}$, la quale per costruzione ha la forma indicata a sinistra poiché $A(t)$ è un enunciato e quindi t è $S^m(0)$, per qualche m, la trasforma in una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}_A$-valida $\mathscr{D}'$ della forma indicata a destra:

$$\Phi_\omega:\ \frac{\begin{matrix}\vdots\\ \ldots\ A(S^n(0))\ \ldots\end{matrix}}{A(S^m(0))} \qquad\qquad \begin{matrix}\vdots\\ A(S^m(0))\end{matrix}$$

Facciamo vedere che la regola (ω) è $\mathscr{S}_A$-valida. Per ogni n, sia $\mathscr{D}_n$ una dimostrazione $\mathscr{S}_A$-valida di $A(S^n(0))$ Per semplicità supponiamo che $\mathscr{D}_n$ sia chiusa. Chiamiamo $\mathscr{D}$ la dimostrazione chiusa di $A(t)$ che si ottiene applicando (ω) alle dimostrazioni $\mathscr{D}_n$, per ogni n. Poiché $A(t)$ è un enunciato, al solito t è $S^m(0)$, per qualche m. Ora $\mathscr{D}$ si riduce immediatamente a $\mathscr{D}_m$ con un'applicazione dell'operazione di $\mathscr{S}_A$-convalida Φ_ω. Quindi poiché $\mathscr{D}_m$ è $\mathscr{S}_A$-valida, per la proprietà (**B**) del § 7 si ha che $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}_A$-valida.

Mentre esiste un senso ragionevole in cui le regole di **LI** e **LC** possono essere considerate essenzialmente piú elementari delle altre regole valide, non si vede come considerare (*Ind*) piú elementare di (ω). La scelta tra (*Ind*) e (ω) sembra dipendere piú da considerazioni di ordine generale sulla natura delle dimostrazioni che dalle regole in sé. Se si pone soprattutto l'accento sull'aspetto linguistico delle dimostrazioni, cioè sulla comunicazione dei processi mentali con cui ci si persuade della validità dei teoremi matematici, come in [23] e [24], (*Ind*) dev'essere preferita. Se invece si insiste sul carattere primario dei processi mentali, e soprattutto sul fatto che questi in generale sono rappresentati molto meglio da certe strutture infinite che dalle parole che adoperiamo per comunicarli, come in [9] p. 324, allora la scelta di (ω) si impone. (Per una discussione piú dettagliata, cfr. [1].)

11. *Condizioni sulle variabili individuali libere*

Come si è già accennato alla fine del § 3, le variabili individuali libere che vengono chiuse in una dimostrazione devono soddisfare certe condizioni generali. Formuleremo ora queste condizioni, mostrando come esse siano necessarie per assicurare la « coerenza » della nozione di dimostrazione $\mathscr{S}$-valida, nel senso della clausola (*jj*) del § 7.

Le condizioni hanno lo scopo di impedire il verificarsi delle seguenti circostanze:

(1) in un'inferenza viene chiusa una variabile individuale libera che occorre in una classe di assunzioni i cui membri rimangono aperti dopo quell'inferenza;

(2) in un'inferenza viene chiusa una variabile individuale libera che possiede delle occorrenze che rimangono aperte dopo quell'inferenza.

Le conseguenze di (1) e (2) sono mostrate dagli esempi seguenti. Consideriamo anzitutto una dimostrazione che contiene un'inferenza del tipo (1), cioè la dimostrazione aperta:

$$\frac{a = 0}{\forall x\,(x = 0)}\ (a)\ .$$

Sebbene la dimostrazione sia stata generata mediante la regola $\mathscr{S}_A$-valida ($\forall$I), è chiaro che essa non è $\mathscr{S}_A$-valida. In effetti non può esistere alcuna dimostrazione $\mathscr{S}_A$-valida di $\forall x (x = 0)$. Infatti, supponiamo che esista una tale dimostrazione, diciamo $\mathscr{D}$. Per semplicità si può supporre che $\mathscr{D}$ sia chiusa. Per la clausola (vj') del § 7 $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione $\mathscr{D}'$ di $\forall x (x = 0)$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}'_1$ è una dimostrazione aperta $\mathscr{S}_A$-valida di $a = 0$, con una variabile individuale libera aperta a. Per definizione lo $\mathscr{S}_A$-caso $\mathscr{D}''_1$ di $\mathscr{D}'_1$ che si ottiene sostituendo a con $S(0)$ è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}_A$-valida di $S(0) = 0$. Perciò per la clausola (j) del § 7 $\mathscr{D}''_1$ si riduce ad una dimostrazione di $S(0) = 0$ appartenente a $\mathscr{S}_A$. Ma allora $S(0) = 0$ è $\mathscr{N}$-vero, per la scelta di $\mathscr{S}_A$. D'altra parte ovviamente $S(0) = 0$ non può essere $\mathscr{N}$-vero. Si ottiene cosí una contraddizione.

Consideriamo ora una dimostrazione che contiene un'inferenza del tipo (2), cioè la dimostrazione aperta:

$$\dfrac{\dfrac{\neg(S(a) = 0)}{\exists x \neg (x = a)} \qquad \dfrac{[(\neg(a = a))]}{\exists x \neg (x = x)}}{\exists x \neg (x = x)}\ (a)\ .$$

Sebbene la dimostrazione sia stata generata mediante le regole $\mathscr{S}_A$-valide ($\exists$ I) e ($\exists$ E), è chiaro che essa non è $\mathscr{S}_A$-valida. In effetti non può esistere alcuna dimostrazione $\mathscr{S}_A$-valida di $\exists x \neg (x = x)$. Infatti supponiamo che esista una tale dimostrazione, diciamo $\mathscr{D}$. Per semplicità si può supporre che $\mathscr{D}$ sia chiusa. Per la clausola (vjj) del § 7 $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione $\mathscr{D}'$ di $\exists x \neg (x = x)$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}'_1$ è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}_A$-valida di $\neg (t = t)$, per qualche nome t. Per la clausola (v') del § 7 a sua volta $\mathscr{D}'_1$ si riduce ad una dimostrazione $\mathscr{D}''_1$ di $\neg (t = t)$ la cui sottodimostrazione immediata $\mathscr{D}''_2$

è una dimostrazione aperta $\mathscr{S}_A$-valida di $\perp$, con una classe di assunzioni aperte ($t = t$). Sia $\mathscr{D}_3$ un $\mathscr{S}_A$-caso di $\mathscr{D}''_2$. Per la clausola (j) del § 7 $\mathscr{D}_3$ si riduce ad una dimostrazione di $\perp$ appartenente a $\mathscr{S}_A$. Ma allora $\perp$ è $\mathscr{N}$-vero, per la scelta di $\mathscr{S}_A$. D'altra parte ovviamente $\perp$ non può essere $\mathscr{N}$-vero. Si ottiene così una contraddizione.

Ciò suggerisce che le condizioni devono avere la seguente forma:

(i) in un'inferenza in cui viene chiusa una variabile individuale libera a, a non deve occorrere in alcuna classe di assunzioni i cui membri rimangono aperti dopo quell'inferenza;

(ii) in un'inferenza in cui viene chiusa una variabile individuale libera a, devono essere chiuse tutte le occorrenze di a.

In particolare la condizione (i) richiede che, in un'applicazione di ($\forall$ I), la variabile individuale libera a non occorra in alcuna classe di assunzioni aperte della dimostrazione di $A(a)$, in un'applicazione di ($\exists$ E), a non occorra in alcuna classe di assunzioni aperte della dimostrazione di B eccetto $(A(a))$, e in un'applicazione di (Ind), a non occorra in alcuna classe di assunzioni aperte della dimostrazione di $A(S(a))$ eccetto $(A(a))$. La condizione (ii) richiede che in una dimostrazione che contiene un'inferenza ottenuta mediante un'applicazione di ($\forall$ I), a occorra solo in nodi che sono ascendenti della conclusione di quell'inferenza, in una dimostrazione che contiene un'inferenza ottenuta mediante un'applicazione di ($\exists$ E), a occorra solo in nodi che sono ascendenti della premessa B di quell'inferenza, e in una dimostrazione che contiene un'inferenza ottenuta mediante una applicazione di (Ind), a occorra solo nella premessa $A(S(a))$, o in nodi che sono ascendenti della premessa $A(S(a))$, di quell'inferenza. In generale la condizione (ii) richiede che in una dimostrazione nessuna variabile individuale libera venga chiusa in due inferenze differenti.

12. *Conclusione*

Il principale difetto della definizione della $\mathscr{M}$-verità è che essa non fornisce alcun criterio per stabilire se una formula è $\mathscr{M}$-vera. Se si accetta che l'unico modo per decidere ciò è in base ad una dimostrazione (piuttosto che, per esempio, in base ad una « illuminazione »), allora è necessario concludere che la nozione di dimostrazione è piú fondamentale di quella $\mathscr{M}$-verità, e che non c'è alcun motivo per non riformulare quest'ultima in termini della prima.

Naturalmente si può sempre dare un significato autonomo alla nozione di $\mathscr{M}$-verità, assumendo che la proprietà di una formula A di essere $\mathscr{M}$-vera è una proprietà di A in sè, indipendentemente dal fatto che tale proprietà possa essere stabilita (senza restrizioni sui mezzi dimostrativi adoperati). Se si accetta questo punto di vista, implicito ad esempio in [28], il passaggio dalla nozione di $\mathscr{M}$-verità a quella di $\mathscr{S}$-validità si configura come un passaggio da una teoria realistico-platonica della verità ad una teoria operativa, in cui la verità di una formula viene definita in termini delle operazioni mediante cui ci si persuade della sua verità, cioè in termini di dimostrazioni.

Se invece non si accetta tale punto di vista, il passaggio in questione costituisce un naturale perfezionamento, che elimina una inutile deviazione. Ci si può chiedere, però, se il perfezionamento sia esente dal difetto della nozione di $\mathscr{M}$-verità che esso intende evitare. Ora, se si esaminano le clausole (*j*) — (*vjj*) del § 7, ci si rende conto che non è cosí. Per esempio, in base a (*j*), per stabilire se una dimostrazione chiusa $\mathscr{D}$ di un enunciato atomico P è $\mathscr{S}$-valida, occorre stabilire se $\mathscr{D}$ si riduce ad una dimostrazione di P appartenente a $\mathscr{S}$, e ciò richiede in generale una dimostrazione. Analogamente, una dimostrazione è richiesta in tutti gli altri casi, e nulla garantisce che tale dimostrazione sia di tipo essenzialmente piú elementare della nozione di dimostrazione $\mathscr{S}$-valida definita.

Questa difficoltà può essere evitata mostrando che tutte le dimostrazioni $\mathscr{S}$-valide possono essere scomposte in certe inferenze elementari non ulteriormente analizzabili, che si ottengono applicando regole appartenenti ad una classe prefissata. Si tratta cioè di far veder che esiste un sistema di regole **S** che è completo rispetto alla nozione di dimostrazione $\mathscr{S}$-valida.

In effetti, se un tale sistema **S** esistesse, il problema di stabilire se una data dimostrazione $\mathscr{D}$ è $\mathscr{S}$-valida si ridurrebbe a quello di stabilire se $\mathscr{D}$ è stata generata mediante le regole di **S**. In virtú del carattere elementare delle regole di **S**, ciò avrebbe il vantaggio di non comportare alcun rimando alla nozione generale astratta di dimostrazione. Si comprende perciò come la determinazione di un sistema di regole **S** completo rispetto alla nozione di dimostrazione $\mathscr{S}$-valida, e piú in generale di un sistema di regole completo rispetto alla nozione di dimostrazione valida, rivesta un'importanza centrale per una teoria operativa della verità.

Appendice

La nozione di dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida è stata ottenuta nel testo in base ad un'analisi della nozione di enunciato $\mathscr{M}$-vero. Questo modo di presentarla differisce da quello di [23] e [24], in cui la nozione viene ottenuta mediante un'analisi della nozione di *costruzione di un enunciato*. In effetti in [23] e [24] si assume che esista una stretta relazione tra il significato costruttivo delle costanti logiche e le dimostrazioni in forma canonica. (Cfr. anche la discussione in [22].)

Per stabilire tale stretta relazione, però, in [23] e [24] si adotta una versione non standard della nozione di costruzione di un enunciato, che sopprime certe caratteristiche che sono essenziali se essa deve assolvere allo scopo per cui fu introdotta originariamente, cioè quello di fornire una spiegazione riduttiva del significato costruttivo delle costanti logiche.

Vale la pena, perciò, di richiamare gli aspetti essenziali della versione standard, allo scopo di chiarire la differenza che sussiste tra la nozione di costruzione di un enunciato, da un lato, e le nozioni di enunciato $\mathscr{M}$-vero e di dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida, dall'altro. (Per i problemi aperti della versione standard cfr. la discussione in [10].)

Premettiamo qualche considerazione generale sulla natura delle costruzioni. Le costruzioni sono oggetti mentali dati mediante una descrizione completa che permette di decidere se due costruzioni η e ϑ sono la stessa costruzione e se una costruzione η può essere applicata ad una costruzione ϑ. Quindi le costruzioni soddisfano le condizioni:

(1) la relazione « $\eta = \vartheta$ » è decidibile;

(2) la relazione « η è applicabile a ϑ » è decidibile.

La decidibilità di cui si parla qui non va confusa con la decidibilità *meccanica,* poiché essa si riferisce ad oggetti mentali piuttosto che ad oggetti formali, e comporta procedimenti del tipo, ad esempio, di quello che permette di riconoscere se una dimostrazione può essere rappresentata mediante una dimostrazione formale generata in base ad un sistema fissato di regole.

Oltre alle condizioni generali (1) e (2) le costruzioni soddisfano certe condizioni di chiusura. In particolare esse comprendono almeno una costruzione costante 0, e sono chiuse rispetto a certe operazioni molto elementari come l'applicazione —(—) di una costruzione ad un'altra e la sua inversa $^{-1}$, l'operazione δ di formazione di una coppia di costruzioni e le operazioni inverse δ_1 e δ_2. Ciò è stabilito dalle seguenti condizioni:

(3) 0 è una costruzione;

(4) se η e ϑ sono costruzioni, $\eta(\vartheta)$ è una costruzione;

(5) se η è una costruzione, η^{-1} è una costruzione;

(6) se η_1 e η_2 sono costruzioni, $\delta(\eta_1, \eta_2)$ è una costruzione;

(7) se η è una costruzione, $\delta_i(\eta)$ è una costruzione, per $i = 1, 2$.

Altre condizioni di chiusura sono discusse nella teoria generale delle costruzioni.

Il fatto che le costruzioni siano date mediante una descrizione completa, cioè come oggetti totali, fa nascere qualche problema per quanto riguarda il significato da assegnare alle operazioni —(—), $^{-1}$, δ_1 e δ_2 quando queste sono applicate ad argomenti che non hanno la forma prevista. Per ovviare a ciò l'ordinario significato di tali operazioni viene esteso stabilendo che se, in base a (2), η non è applicabile a ϑ, allora $\eta(\vartheta) = \eta$. (Ciò vale anche nel caso in cui η^{-1} non è applicabile a ϑ.) Si stabilisce inoltre che, se η non ha la forma $\delta(\eta_1, \eta_2)$, allora $\delta_i(\eta) = \eta$, per $i = 1, 2$.

Usiamo $<\eta_1, \ldots, \eta_n>$ come abbreviazione di $\delta(\eta_1, \delta(\eta_2, \ldots, \delta(\eta_{n-1}), \delta(\eta_n, 0)) \ldots))$, e $\delta_i^*(\eta)$ come abbreviazione di $\delta_1(\underbrace{\delta_2(\delta_2 \ldots (\delta_2}_{i-1}(\eta)) \ldots))$. Poiché $\delta_i(\delta(\eta_1, \eta_2)) = \eta_i$ per $i = 1, 2$, si ha che per ogni i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\delta_i^*(<\eta_1, \ldots, \eta_n>) = \eta_i$, mentre se $i > n$, allora $\delta_i^*(<\eta_1, \ldots, \eta_n>) = 0$.

A differenza delle costruzioni, le specie di costruzioni (proprietà di costruzioni appartenenti ad un dominio decidibile) non sono concetti descritti cosí completamente da soddisfare condizioni analoghe a (1) e (2). Tuttavia esse possono essere ridotte alla nozione di costruzione stabilendo che una specie **M** di costruzioni è determinata da una costruzione $\mu_{\mathbf{M}}$ tale che:

(*) per ogni costruzione η, $\mu_{\mathbf{M}}(\eta) = 0$ se e solo se $\delta_1(\eta)$ dimostra che $\delta_2(\eta)$ soddisfa **M**.

Ciò si basa sull'assunzione:

(8) la relazione « η dimostra che ϑ soddisfa **M** » è decidibile.

La riduzione consiste nell'assumere che esiste sempre una costruzione μ_M che è la funzione caratteristica di tale relazione, cioè è tale che $\mu_M(\delta(\eta, \vartheta)) = 0$ se e solo se la relazione vale.

La riduzione può essere estesa facilmente alle relazioni ed operazioni sulle specie di costruzioni. Per esempio se, per $i = 1, 2$, $\mathbf{M}_i$ è determinata da μ_{Mi}, la relazione di sottospecie $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2$ è determinata dall'asserzione « se $\mu_{M1}(\eta) = 0$ allora $\mu_{M2}(\eta) = 0$ » con una variabile libera per costruzioni η. Qui « se . . . allora » in base a (1) è applicata ad asserzioni decidibili, quindi può avere il consueto significato vero-funzionale.

Analogamente se per ogni i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathbf{M}_i$ è determinata da μ_{Mi} allora il prodotto cartesiano $\mathbf{M}_1 \times \ldots \times \mathbf{M}_n$ è determinato da una costruzione $\mu_{M1 \times \ldots \times Mn}$ tale che:

(**) per ogni costruzione η, $\mu_{M1 \times \ldots \times Mn}(\eta) = 0$ se e solo se $\mu_{M1}(\delta^*_1(\eta)) = 0$ e . . . e $\mu_{Mn}(\delta_n^*(\eta)) = 0$

Anche in questo caso « e » in base a (1) è applicata ad asserzioni decidibili, quindi può avere il consueto significato vero-funzionale.

Considerando le specie di costruzioni come specie di ordine 1, possiamo costruire a partire da esse una gerarchia in cui, per ogni n, le specie di ordine n sono proprietà di specie di ordine $< n$ appartenenti ad un dominio ben definito. Supponiamo che le specie $\mathbf{M}$ di ordine $< n$ siano determinate da costruzioni μ_M tali che:

(***) per ogni costruzione η, $\mu_M(\eta) = 0$ se e solo se $\delta_1(\eta)$ dimostra che la specie determinata da $\delta_2(\eta)$ soddisfa $\mathbf{M}$.

Allora è facile ridurre alla nozione di costruzione anche le specie di ordine n. Basta stabilire che una specie $\mathbf{M}$ di ordine n è determinata da una costruzione μ_M che soddisfa (***).

Ciò si basa sull'assunzione:

(9) la relazione « η dimostra che la specie determinata da ϑ soddisfa $\mathbf{M}$ » è decidibile.

La riduzione consiste al solito nell'assumere che esiste sempre una costruzione μ_M che è la funzione caratteristica di tale relazione. La riduzione delle relazioni ed operazioni sulle specie di ordine superiore si ottiene come nel caso delle specie di costruzioni.

Ciò posto, sia $\mathscr{L}$ un linguaggio del primo ordine. Per semplicità assumiamo che $\mathscr{L}$ non contenga alcuna costante funzionale, e che contenga costanti relazionali n-arie solo per $0 < n \leqslant m$, dove m è un numero naturale fissato. Assumiamo inoltre che $\mathscr{L}$ sia determinato da costruzioni μ_L, μ_V, μ_C, μ_{Rn} $(0 < n \leqslant m)$ che sono le funzioni caratteristiche delle proprietà decidibili di essere una variabile individuale libera, una variabile individuale vincolata, una costante individuale e una costante relazionale n-aria, rispettivamente. Le definizioni seguenti, comunque, potrebbero essere facilmente generalizzate.

Una *realizzazione costruttiva* di $\mathscr{L}$ è una coppia $\mathscr{C} = \delta(\mu_M, \nu)$, dove μ_M è una costruzione che determina una specie $\mathbf{M}$ e ν è una costruzione che soddisfa le seguenti condizioni:

(*a*) per ogni costruzione η, se $\mu_C(\eta) = 0$ allora $\mu_M(\nu(\eta)) = 0$;

(*b*) per ogni costruzione η, se $\mu_{Rn}(\eta) = 0$, cioè se η è una costante relazionale n-aria R^n, allora $\nu(\eta) = \xi_{Rn}$, dove ξ_{Rn} è una costruzione che determina una sottospecie di di $\underbrace{\mathbf{M} \times \ldots \times \mathbf{M}}_{n}$ (quindi ξ_{Rn} ha la proprietà che, per ogni costruzione ϑ, se $\xi_{Rn}(\vartheta) = 0$ allora $\mu_{\underbrace{M \times \ldots \times M}_{n}}(\vartheta) = 0$);

(*c*) per ogni costruzione η e ϑ tale che $\mu_C(\eta) = 0$ e $\mu_C(\vartheta) = 0$, se $\nu(\eta) = \nu(\vartheta)$ allora $\eta = \vartheta$, cioè ν è biunivoca.

In generale non tutte le costruzioni η tali che $\mu_M(\eta) = 0$ hanno la forma $\nu(\vartheta)$. Tuttavia si possono sempre estendere $\mathscr{L}$ e ν in modo da ottenere un linguaggio $\mathscr{L}(\mathscr{C})$ e una costruzione ν^* che soddisfano le seguenti condizioni, dove μ_C^* è una costruzione che determina la specie **C*** delle costanti individuali di $\mathscr{L}$ ($\mathscr{C}$):

(a') per ogni costruzione η, se $\mu_C^*(\eta) = 0$ allora $\mu_M(\nu^*(\eta)) = 0$;

(b') per ogni costruzione η, se $\mu_{R^n}(\eta) = 0$, cioè se η è una costante relazionale n-aria R^n, allora $\nu^*(\eta) = \xi_{R^n}$, dove ξ_{R^n} è come in (b);

(c') per ogni costruzione η e ϑ tale che $\mu_C^*(\eta) = 0$ e $\mu_C^*(\vartheta) = 0$, se $\nu^*(\eta) = \nu^*(\vartheta)$ allora $\eta = \vartheta$, cioè ν^* è biunivoca;

(d') per ogni costruzione η, se $\mu_M(\eta) = 0$ allora $\nu^*(\nu^{*-1}(\eta)) = \eta$, cioè ν^* applica le costruzioni η tali che $\mu_C^*(\eta) = 0$ *sulle* costruzioni η tali che $\mu_M(\eta) = 0$

Infatti, prendiamo come $\mathscr{L}$ ($\mathscr{C}$) il linguaggio che differisce da $\mathscr{L}$ solo per il fatto che la specie **C*** delle sue costanti individuali è determinata dalla costruzione μ_C^* definita nel modo seguente:

($+$) per ogni costruzione η, $\mu_C^*(\eta) = 0$ se e solo se $\mu_C(\eta) = 0$ oppure si ha che $\mu_M(\eta) = 0$ e $\nu(\nu^{-1}(\eta)) \neq \eta$

In base a ($+$) **C*** è l'unione della specie decidibile **C** delle costanti individuali di $\mathscr{L}$ e della specie **I** delle costruzioni $\delta_2(\eta)$ tali che $\mu_M(\eta) = 0$ e η non ha la forma $\nu(\vartheta)$. Le costruzioni $\delta_1(\eta)$ svolgono il ruolo di dimostrazioni che mostrano che $\delta_2(\eta)$ soddisfa **I**, e quindi **C***.

Prendiamo come ν^* la costruzione definita nel modo seguente:

($++$) per ogni costruzione η, $\nu^*(\eta) = \nu(\eta)$ se $\mu_C(\eta) = 0$ o $\mu_{R^n}(\eta) = 0$ per qualche n, $0 < n \leqslant m$; $\nu^*(\eta) = \eta$ se $\mu_M(\eta) = 0$ e $\nu(\nu^{-1}(\eta)) \neq \eta$.

È chiaro che ν^* soddisfa e condizioni (a') - (d').

Per formulare la nozione di costruzione di un enunciato, stabiliamo il seguente *principio fondamentale*:

(10) se Θ è una proprietà decidibile delle costruzioni, la relazione « η dimostra l'asserzione $\Theta(\vartheta)$ con una variabile libera per costruzioni ϑ » è decidibile.

Il principio stabilisce che si sa sempre riconoscere se una costruzione η è uno schema generale di dimostrazione che, applicato ad una costruzione qualsiasi ϑ, produce una dimostrazione di $\Theta(\vartheta)$. Indichiamo con $\Delta(\eta, \vartheta \cdot \Theta(\vartheta))$ la relazione di cui in (10).

Per ogni costruzione η e per ogni enunciato A di $\mathscr{L}$ ($\mathscr{C}$), definiamo una relazione $\Pi(\eta, A)$, scritta anche $\Pi_A(\eta)$. La definizione è per induzione su numero delle costanti logiche (diverse da $\perp$) che occorrono in A, e consta delle seguenti clausole:

(i) $\Pi_{R^n(i_1, \ldots, i_n)}(\eta)$ se e solo se $\eta = <\delta_1(\nu^*(\eta_1)), \ldots, \delta_n(\nu^*(\eta_n))>$ e $\xi_R{}^n(<\nu^*(\eta_1), \ldots, \nu^*(\eta_n)>) = 0$, dove per ogni k, $1 \leqslant k \leqslant n$, η_k sta per i_k se $\mu_C(i_k) = 0$, cioè se i_k è una costante individuale di $\mathscr{L}$, sta per $\delta(\delta_k^*(\eta), i_k)$ altrimenti;

(ii) non $\Pi_\perp(\eta)$;

(iii) $\Pi_{A \wedge B}(\eta)$ se e solo se $\Pi_A(\delta_1(\eta))$ e $\Pi_B(\delta_2(\eta))$;

(iv) $\Pi_{A \vee B}(\eta)$ se e solo se $\Pi_A(\eta)$ oppure $\Pi_B(\eta)$;

(v) $\Pi_{A \to B}(\eta)$ se e solo se $\Delta(\delta_1(\eta), \vartheta \cdot \Theta_{\eta;\, A \to B}(\vartheta))$, dove $\Theta_{\eta;\, A \to B}(\vartheta)$ sta per « se $\Pi_A(\vartheta)$ allora $\Pi_B((\delta_2(\eta))(\vartheta))$ »;

(vi) $\Pi_{\forall x A(x)}(\eta)$ se e solo se $\Delta(\delta_1(\eta), \vartheta \cdot \Theta_{\eta;\, \forall x A(x)}(\vartheta))$, dove $\Theta_{\eta;\, \forall x A(x)}(\vartheta)$ sta per « se $\mu_C^*(\vartheta) = 0$ allora $\Pi_{A(\delta_2(\vartheta))}((\delta_2(\eta))(\vartheta))$ »;

(vii) $\Pi_{\exists x A(x)}(\eta)$ se e solo se $\mu_C^*(\delta_2(\eta)) = 0$ e $\Pi_{A(\delta_2(\delta_2(\eta)))}(\delta_1(\eta))$

In tali clausole « non », « e », « o », « se... allora » hanno il consueto significato vero-funzionale. Ciò si giustifica in base al fatto che, se le si interpreta in tal modo, esse risultano applicate solo ad asserzioni decidibili. In effetti da (1) e (10) segue immediatamente che:

(+ + +) la relazione $\Pi_A(\eta)$ è decidibile.

Si noti che (+ + +) è essenziale nelle clausole (v) e (vi) per assicurare che le proprietà $\Theta_{\eta;\, A \to B}(\vartheta)$ e $\Theta_{\eta;\, \forall x\, A(x)}(\vartheta)$ siano decidibili, come richiesto in (10).

Per ogni enunciato A di $\mathscr{L}$, diciamo che una costruzione η è una *costruzione* di A *su* $\mathscr{C}$, o in breve è una $\mathscr{C}$-costruzione di A, se e solo se $\Pi_A(\eta)$. Per ogni formula $A(a_1, \ldots, a_n)$ di $\mathscr{L}$ le cui uniche variabili individuali libere sono $a_1, \ldots, a_n$, diciamo che una costruzione η è una $\mathscr{C}$-*costruzione* di $A(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $\Delta\, \delta_1(\eta), \vartheta \cdot \Theta_{\eta;\, A(a_1, \ldots, a_n)}(\vartheta)$, dove $\Theta_{\eta;\, A(a_1, \ldots, a_n)}(\vartheta)$ sta per « se $\mu_C{}^*(\delta_1{}^*(\vartheta)) = 0$ e . . . e $\mu_C{}^*(\delta_n{}^*(\vartheta)) = 0$ allora $\Pi_{A(\delta_2(\delta_1{}^*(\vartheta)), \ldots, \delta_2(\delta_n{}^*(\vartheta)))}((\delta_2(\eta))(\vartheta))$ ».

Diciamo che una costruzione η è una *costruzione di una formula* A di $\mathscr{L}$ se e solo se η è una $\mathscr{C}$-costruzione di A, per ogni realizzazione costruttiva $\mathscr{C}$ di $\mathscr{L}$. La nozione di costruzione di una formula è essenziale per definire la verità di una formula in senso costruttivo. Si dice che una formula A di $\mathscr{L}$ è *vera* (*in senso costruttivo*) se e solo se esiste una costruzione di A.

Siamo ora in grado di comprendere che cosa distingue la nozione di $\mathscr{C}$-costruzione di un enunciato dalle nozioni di enunciato $\mathscr{M}$-vero e di dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida. Il punto chiave della distinzione sta nel fatto che le clausole (i) - (vii) della definizione di $\mathscr{C}$-costruzione di un enunciato forniscono una spiegazione riduttiva del significato costruttivo delle costanti logiche, poiché in esse « non », « e », « o », « se ... allora » hanno un significato essenzialmente piú elementare di quello delle costanti logiche spiegate. Tale carattere piú elementare sta nel fatto che, mentre come si è già visto nelle clausole in questione « non », « e », « o », « se ... allora » sono applicate solo ad asserzioni decidibili, le costanti logiche si applicano a formule che esprimono asserzioni in generale indecidibili. Quindi le clausole (i) - (vii) conducono ad una effettiva riduzione della complessità logica.

Nessuna riduzione della complessità logica si ottiene invece attraverso le clausole della definizione delle nozioni di enunciato $\mathscr{M}$-vero e di dimosrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida. In effetti l'analogo di (+ + +) non vale per tali nozioni (non vale come proprietà « interna » della definizione, piuttosto che come proprietà « esterna », da stabilire in base ad una dimostrazione). A ciò fa riscontro il fatto che, mentre le clausole (i) - (vii) della definizione di $\mathscr{C}$-costruzione in virtú di (+ + +) permettono di per sé di stabilire se una costruzione η è una $\mathscr{C}$-costruzione di un enunciato A, le clausole (i) - (vii) del § 4 e le clausole (j) - (vjj) del § 7, come notato nei §§ 4 e 12 rispettivamente, rimandano ad un'evidenza esterna alla definizione per poter essere applicate.

Questa sostanziale differenza, del resto, è riconosciuta implicitamente anche in [23], dove si definisce una classe di dimostrazioni chiuse $\mathscr{S}$-valide, la classe delle dimostrazioni $\mathscr{S}$-*conclusive*, date da coppie $<\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2>$ dove $\mathscr{D}_1$ è una dimostrazione chiusa $\mathscr{S}$-valida e $\mathscr{D}_2$ è una dimostrazione che mostra che $\mathscr{D}_1$ è $\mathscr{S}$-valida. La nozione di dimostrazione $\mathscr{S}$-conclusiva non costituisce, però, un adeguato sostituto della nozione di $\mathscr{C}$-costruzione, a causa dei problemi che essa fa nascere riguardo a $\mathscr{D}_2$. Se $\mathscr{D}_2$ dev'essere anch'essa $\mathscr{S}$-valida, allora occorre richiedere che $\mathscr{D}_2$ sia $\mathscr{S}$-conclusiva, e cosí via. Questo rimando non interviene, invece, nel caso della nozione di $\mathscr{C}$-costruzione poiché esso viene prevenuto da (+ + +), che come si è visto si basa sul fatto che le costruzioni soddisfano le condizioni (1) e (10).

Bibliografia

I princípi generali della teoria della dimostrazione sono discussi in [22], [23], [24], [10], [11], [1].

I sistemi di deduzione naturale furono introdotti in [5]. (Per un'esposizione elementare v. anche [15].) Tali sistemi sono stati considerati a lungo interessanti soprattutto, se non esclusivamente, dal punto di vista didattico. (Cfr. ad esempio le osservazioni in [26].) Solo con i perfezionamenti introdotti in [21] essi si sono trasformati in un utile strumento per l'analisi delle dimostrazioni.

I teoremi di normalizzazione per **LI** e **LC** furono stabiliti originariamente in [21], [22]. Successivamente essi sono stati estesi ad **AI** e **AC** in [8], [23], [29], [4], a sistemi di deduzione naturale per la teoria delle definizioni induttive generalizzate iterate finitamente in [16], a sistemi di deduzione naturale per la logica proposizionale infinitaria in [18], a sistemi di deduzione naturale per la logica del secondo ordine in [17], [22], [27], a sistemi di deduzione naturale per l'aritmetica del secondo ordine e per l'aritmetica di ordine superiore (teoria dei tipi) in [6], [7], [19], [20].

La proprietà di univocità può essere stabilita facilmente adattando il metodo di [20], [27].

Nella letteratura sono state considerate anche delle forme essenzialmente piú forti del teorema di normalizzazione. Tali forme dànno luogo, però, a delle difficoltà se non si introducono opportune restrizioni sulla nozione di dimostrazione o sulla nozione di successione di riduzioni, come mostrano i controesempi di [13], [14].

Le proprietà fondamentali delle dimostrazioni normali, e le applicazioni dei teoremi di normalizzazione che esse consentono, sono discusse in [21], [22], [25], [29], [3], [4]. I rapporti tra i risultati di normalizzazione per i sistemi di deduzione naturale e i teoremi di eliminazione dei tagli per i calcoli delle sequenze sono esaminati in [21], [30].

PSLS = J. E. Fenstad (a cura di), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium,* Amsterdam, North-Holland, 1971.

LMPS = P. Suppes - L. Henkin - A. Joja - Gr. C. Moisil (a cura di), *Logic, methodology and philosophy of science IV. Proceedings of the 1971 International Congress,* Amsterdam, North-Holland, 1973.

[1] C. Cellucci, *La qualità nella dimostrazione matematica,* in R. Lorch (a cura di), *La qualità,* Bologna, Il Mulino, in corso di stampa.

[2] C. Cellucci, *Un connettivo per la logica intuizionista,* in *Le Matematiche,* v. 29, (1974), Fasc. 2.

[3] C. Cellucci, *Una dimostrazione del teorema di uniformità,* in *Le Matematiche,* v. 29, (1974), Fasc. 2.

[4] C. Cellucci, *Teoremi di normalizzazione per alcuni sistemi funzionali,* in *Le Matematiche,* v. 30, (1975), Fasc. 1 e 2.

[5] G. Gentzen, *Investigations into logical deduction,* in M. E. Szabo (a cura di), *The collected papers of Gerhard Gentzen,* Amsterdam, North-Holland, 1969, pp. 68-131.

[6] J.-Y. Girard, *Une extension de l'interprétation de Gödel à l'analyse, et son application à l'élimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types,* in PSLS, pp. 63-92.

[7] J.-Y. Girard, *Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur,* Thèse de doctorat d'État, Université Paris VII, 1972.

[8] H. R. Jervell, *A normalform in first order arithmetic,* in PSLS, pp. 93-108 .

[9] G. Kreisel, *A survey of proof theory,* in *The Journal of Symbolic Logic,* v. 33, (1968), pp. 321-388.

[10] G. Kreisel, *A survey of proof theory II,* in PSLS, pp. 109-170.

[11] G. Kreisel, Recensione di M. E. Szabo (a cura di), *The collected papers of Gerhard Gentzen,* in *The Journal of Philosophy,* v. 68, (1971), pp. 238-265.

[12] G. Kreisel - J. L. Krivine, *Elements of mathematical logic,* Amsterdam, North-Holland, 1967.

[13] D. Leivant, *Existential instantiation in a system of natural deduction for intuitionistic arithmetics,* Rept. ZW 13/73, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1973.

[14] D. Leivant, *Discharge-class is a genuine notion for natural deduction systems,* nota circolata privatamente.

[15] J. E. Lemmon, *Elementi di logica,* Bari, Laterza, 1975.

[16] P. Martin-Löf, *Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive definitions,* in PSLS, pp. 179-216.

[17] P. Martin-Löf, *Hauptsatz for the intuitionistic theory of species,* in PSLS, pp. 217-233.

[18] P. Martin-Löf, *Infinite terms and a system of natural deduction,* in *Compositio Mathematica,* v. 24, (1972), pp. 93-103.

[19] P. Martin-Löf, *Hauptsatz for intuitionistic simple type theory,* in LMPS, pp. 279-290.

[20] P. Martin-Löf, *An intuitionistic theory of types,* ciclost,. Dept. of Mathematics, University of Stockholm, 1973.

[21] D. Prawitz, *Natural deduction. A proof-theoretical study,* Stockholm-Göteborg-Uppsala, Almqvist & Wiksell, 1965.

[22] D. Prawitz, *Ideas and results in proof theory,* in PSLS, pp. 235-307.

[23] D. Prawitz, *Towards a foundation of a general proof theory,* in LMPS, pp. 225-250.

[24] D. Prawitz, *On the idea of a general proof theory,* in *Synthese,* v. 27, (1974), pp. 63-77.

[25] D. Prawitz - P. E. Malmnäs, *A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic,* in A. Schmidt - K. Schütte - H. J. Thiele (a cura di), *Contributions to mathematical logic,* Amsterdam, North-Holland, 1968, pp. 215-229.

[26] H. Putnam, *Elementary logic and foundations of set theory,* in R. Klibanski (a cura di), *Philosophy in the mid-century,* Firenze, La Nuova Italia, 1958, pp. 56-61.

[27] S. Stenlund, *Combinators, λ-terms and proof theory,* Dordrecht, Reidel, 1972.

[28] A. Tarski, *Verità e dimostrazione,* in E. Casari (a cura di), *La filosofia della matematica del '900,* Firenze, Sansoni, 1973, pp. 68-95.

[29] A. S. Troelstra, *Normalization theorems for systems of natural deduction,* in A. S. Troelstra (a cura di), *Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis,* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1973, pp. 275-323.

[30] J. Zucker, *The correspondence between cut-elimination and normalization,* in *Annals of Mathematical Logic,* v. 7 (1974), pp. 1-112, 113-156.

Aggiunta alla bibliografia. Dopo che la revisione del testo è stata completata (dicembre 1974) si sono resi disponibili i seguenti nuovi lavori.

[31] C. Cellucci, *Proprietà di uniformità e 1-coerenza dell'aritmetica del primo ordine,* in *Le Matematiche,* in corso di stampa.

[32] S. Feferman, Recensione di D. Prawitz [22], in *The Journal of Symbolic Logic,* v. 40, (1975), pp. 232-234.

[33] G. Kreisel-G. E. Mints-S. G. Simpson, *The use of abstract language in elementary metamathematics: some pedagogic examples,* in R. Parikh (a cura di), *Logic Colloquium. Symposium on Logic held at Boston 1972-73,* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1975, pp. 38-131.

[34] R. Statman, *Structural complexity of proofs,* Dissertation, Stanford University, 1974.

[35] W. W. Tait, *A realizability interpretation of the theory of species,* in R. Parikh (a cura di), *Logic Colloquium. Symposium on Logic held at Boston, 1972-73,* Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1975, pp. 240-251.

[36] A. S. Troelstra, *Corrections and additions to « Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis »*, University of Amsterdam, Report 74-16, 1974.

[37] A. S.Troelstra, *Non-extensional equality,* in *Fundamenta Mathematicae,* v. 82, (1975), pp. 307-322.

Tullio De Mauro

Logica e scienze del linguaggio

1. Con questo ciclo si vuole mettere in luce la possibilità di utilizzare la logica come occasione di integrazione di diverse scienze nello studio degli stessi problemi. Qui vogliamo appunto cercare di saggiare la possibilità teorica e la effettiva consistenza culturale dei rapporti tra le analisi della logica formale e simbolico-matematica e le ricerche che le scienze linguistiche conducono intorno al linguaggio storico-naturale e agli altri linguaggi umani e non umani, naturali o artificiali che siano.

Su un tema di questa natura a me piacerebbe piuttosto ascoltare che parlare. Soltanto per un dovere verso il Centro di iniziativa democratica degli insegnanti, ho accettato di discorrerne. Cercherò di farlo nel modo meno lungo possibile, sperando che tutto quello che non potrò e saprò dire la discussione mi dia occasione di ascoltarlo dai matematici. Starà a loro colmare le lacune della mia esposizione. Lacune della mia esposizione, ed entro in argomento, legate al fatto che chi vi parla appartiene ad una delle due corporazioni di studiosi in questione: appartiene alla corporazione dei linguisti. Ora, c'è qui una prima cosa di cui prendere consapevolezza, una prima cosa da dire, almeno in quella che sembra la prospettiva piú corretta nell'analisi dei rapporti tra due discipline, e cioè in una prospettiva realistica che pensi alle persone, alle condizioni sociali, agli istituti entro cui le discipline vivono o non vivono. In questa prospettiva, pensando alle due schiere dei logici e dei linguisti, la prima cosa da dire è che i cultori di studi logici e i cultori di studi linguistici costituiscono due corporazioni separate. Non ho adoperato a caso, né solo per scherzo, il termine corporazione che evoca tutte le chiusure di un mondo medievale diviso in feudi e caste.

2. Nell'attuale organizzazione dei nostri studi c'è una corporazione dei linguisti e c'è una corporazione dei logici, come corporazioni diverse che sviluppano ricerche con scarsa attenzione dei rapporti reciproci.

Prove di questo fatto? Prendete alcune grandi opere di sintesi, per esempio prendete la grande *Storia della logica* dei coniugi Kneale di recente tradotta anche in italiano. In questa dottissima *Storia della logica* potete vedere che su circa seicento studiosi i cui scritti e le cui opere vengono messe a frutto sinteticamente, i linguisti sono tre, e il piú giovane di questi, per cosí dire, è Antoine Arnauld, il logico portorealista morto alla fine del Seicento. I linguisti, i cultori delle scienze linguistiche, in un'opera di sintesi di storia delle ricerche logiche molto dotta, informatissima, rappresentano lo 0,5 per cento della presenza complessiva di autori e studiosi.

Prendete un'altra eccellente opera di sintesi, anch'essa proprio in questi mesi apparsa in italiano, e cioè la *Logica formale* del polacco padre Bochenski. Qui ci sono ancora meno linguisti, se linguisti si possono chiamare alcuni grammatici dell'antichità classica.

Dunque, è modestissima la presenza di linguisti nelle opere istituzionali di logica. Ma non meno modesta è la presenza di logici nelle opere istituzionali sulle quali ci formiamo noi linguisti.

Prendiamo un manuale molto recente, l'*Introduzione alla linguistica teorica* di John Lyons, professore a Edimburgo. È un manuale che si sbilancia notevolmente nella utilizzazione dei punti di vista logici in sede di analisi del linguaggio.

Tra i manuali di linguistica è un manuale, per dir cosí, filo-logico.

Ebbene, qui i logici utilizzati sono sette contro duecentotrenta linguisti. La percentuale è facilmente ricavabile: poco piú del 3,5 per cento. Giustizia vuole però che si dica, per non avere un'idea ottimistica della propensione dei linguisti verso la utilizzazione del lavoro dei logici, che in realtà in un manuale gemello di quello di Lyons, anch'esso dovuto a un bravissimo linguista inglese, l'*Introduzione alla linguistica generale* di Robins, in cui si discute a piú riprese il problema dei rapporti tra analisi linguistica e analisi logica delle lingue storico-naturali, ebbene, nel manuale di Robins la menzione di studiosi di logica è ridotta a zero.

3. Tutto ciò non deve stupire. La *institutio,* il processo di formazione dei linguisti, comprende in molti paesi, in tutti si può dire, un riferimento stretto a materie di tipo storico-filologico e storico-letterario, cui oggi si affiancano o si alternano in qualche situazione altre scienze umane di tipo socio-psicologico. Ma la componente generalmente matematica e specificatamente logica nella formazione dei linguisti è praticamente assente dappertutto.

Al massimo si trovano alcuni linguisti i quali hanno una qualche familiarità con il computo di tipo statistico. Ma dentro la corporazione dei linguisti sono pochissimi quelli in grado di percepire la differenza tra una attrezzatura statistica, tra la capacità, in sostanza, di contare delle occorrenze, e il modo logico-matematico di accostarsi ai problemi del linguaggio.

D'altra parte, se guardiamo alla corporazione dei logici, ci si accorgerà che la matrice della loro formazione è prevalentemente matematica. Molto spesso, addirittura, manca anche questa, e in qualche paese come il nostro è piuttosto filosofica. Che un buon logico debba conoscere a fondo le scienze del linguaggio, la semantica e sintassi delle lingue storico-naturali, è, per ora, un pio desiderio di pochi.

Abbiamo dunque due corporazioni che hanno provenienze e matrici e correlazioni con altre discipline completamente diverse. Sono tuttora eccezionali quindi quei momenti in cui si realizza o si è realizzata una integrazione tra i punti di vista fondati sull'esperienza delle scienze linguistiche e, contemporaneamente, sull'esperienza degli studi logici. Passiamoli in rassegna, una rassegna forzatamente assai rapida.

4. Tra i logici contemporanei si deve ricordare soprattutto la attenzione minuziosa dedicata al lavoro dei linguisti da Bar-Hillel, da David Lewis, figlio del grande logico degli anni venti-trenta, di cui parleremo piú tardi, e da Montague. Tra i linguisti, l'utilizzazione di contributi logici al fine di comprender meglio il funzionamento dei linguaggi storico-naturali e non, è stata, in assoluto, rara. Nell'ala degli studi linguistici che si proclama storicistica Antonino Pagliaro ed Eugenio Coseriu si sono occupati a fondo del tema dei rapporti tra logica e grammatica, utilizzando il lavoro dei logici da Russell ai piú recenti. Su altri versanti teorici e ideologici, ricorderò la utilizzazione dei lavori dei logici polacchi come Ajdukievicz, e dei lavori di Carnap fatta da Louis Hjelmslev in una delle opere piú importanti delle discipline linguistiche, *I fondamenti della teoria del linguaggio.* Nell'ambito strutturalista si deve ricordare Bazell, e soprattutto dobbiamo fare menzione di alcuni dei nomi piú noti della linguistica teorica contemporanea, come l'americano N. Chomsky, l'argentino (ora a Ginevra) Luis Prieto, i francesi M. Gross e A. Culioli, il sovietico S. Shaumjan.

5. Mi sono chiesto se non ci sia una sproporzione nei due elenchi che ho fornito, e cioè se il maggior numero di linguisti che hanno utilizzato logici a alti livelli rispetto ai logici attenti al lavoro dei linguisti, non sia dovuto a una mia deformazione professionale, cioè al fatto che conosco di piú, o, se volete, ignoro meno la bibliografia dei linguisti rispetto alla bibliografia dei logici.

Credo di poter dire, salvo benvenute rettifiche, di no. Non intendo assolutamente difendere la corporazione cui appartengo. Ma credo giusto il giudizio di una persona al di

sopra di un'eventuale mischia tra linguisti e logici, cioè il giudizio di Jean Piaget, il quale ha osservato che la linguistica è all'incrocio di molte diverse discipline. Per ragioni buone e cattive, sta di fatto che l'ambiente dei linguisti è meno chiuso ad apporti provenienti da altre discipline in rapporto a quello dei logici, che hanno spesso un notevole grado di chiusura e una certa superciliosità nei confronti del lavoro di chi non è puro logico.

Comunque, ripeto, siamo dinanzi a manipoli abbastanza esigui di grandi, anzi grandissimi studiosi. E anche questo è da meditare. Cioè, senza togliere nulla alla statura dei logici come Bar-Hillel o Lewis, direi che questi sono sí eccellenti logici, ma non rappresentano propriamente dei poli di sviluppo della loro disciplina. Invece, se ci fate caso, anche chi non ha una grande esperienza di studi linguistici, può riconoscere nei nomi dei linguisti citati, come Chomsky o come Hjelmslev, come Pagliaro, Coseriu, Prieto, Shaumjan, nomi di capiscuola: nomi di linguisti che hanno proposto un paradigma di ricerca alternativa rispetto ad altri, e che hanno suscitato nuovi indirizzi di lavoro tra i linguisti.

6. Oltre che ad opera di questi due esigui manipoli, gli scambi tra studi logici e studi linguistici sussistono grazie a studiosi estranei ad entrambe le discipline.

Ricorderò la funzione assolta da un libro classico degli inizi degli anni venti, *Il significato del significato,* di due letterati e filosofi come Ogden e Richards, che hanno utilizzato molto criticamente lavori e di logici e di linguisti, sicché la loro opera ha circolato parimenti tra logici e linguisti, costituendo una sorta di concreto ponte tra le due discipline.

E ancora bisogna ricordare per analogo motivo Wittgenstein, Cassirer, Adam Schaff e il tenace ed autentico lavoro interdisciplinare di Jean Piaget.

L'importante volume della « Pleiade », *Logique et connaissance scientifique,* l'opera collettiva diretta da Jean Piaget, è forse una delle poche opere veramente interdisciplinari in questo settore degli studi.

7. Come già ho detto, abbiamo citato finora studiosi di prima grandezza, anzi tra i massimi. E tuttavia i momenti di integrazione e di incontro tra ricerche logiche e linguistiche restano scarsi e rari, rispetto alle pesanti e molteplici ragioni che dovrebbero indurre, a mio avviso, a scambi piú stretti tra studiosi di logica e studiosi di linguistica.

Quali sono queste ragioni? Sono ragioni di ordine anzitutto storico. Ma nell'enumerare le ragioni di ordine storico vedremo subito che si tratta di ragioni di ordine storico-teorico, che impegnano, cioè, anche il lavoro attuale delle due discipline.

Se noi guardiamo alla storia degli studi sul linguaggio svolta da cultori di scienze linguistiche ci accorgiamo che l'apparato di concetti e di termini con i quali di generazione in generazione i linguisti hanno analizzato i linguaggi storico-naturali, e poi anche altri linguaggi, si è continuamente nutrito di apporti decisivi provenienti dagli studi logici. Buona parte dei concetti chiave della linguistica antica e contemporanea è presa in prestito da elaborazioni nate nell'ambito della logica.

Farò qualcuno soltanto dei molti esempi che si potrebbero dare, seguendo un ordine approssimativamente cronologico e non sistematico.

Pensiamo anzitutto alla distinzione e alla classificazione delle *partes orationis,* alla distinzione, ad esempio, tanto comune da parere universale, anche se non è, tra nome e verbo. L'individuazione di questa coppia di elementi, nome e verbo, è opera dei primi che, nella Grecia classica, hanno riflettuto sul linguaggio dal punto di vista della funzione di verità degli enunciati, ossia dal punto di vista che sarà poi della logica. In Platone *rhêma* vale ancora e solo « parte predicativa della frase », e *ónoma* equivale a ciò che noi diremmo « soggetto ». Siamo dinanzi a due nozioni logiche: da queste prenderanno le mosse Platone stesso e Aristotele per individuare due distinte parti del discorso, quelle che noi chiamiamo appunto *nome* e *verbo.* L'individuazione e la definizione di queste due parti del discorso hanno tratto origine e alimento dalle riflessioni di tipo logico.

Veniamo ora alla nozione di « determinazione » di un vocabolo che dal piano della lingua « cade » nella frase: è ciò che Aristotele denomina *ptôsis.* È la « caduta » dalla generica potenzialità della lingua nella attuata determinatezza della frase. Sulla scorta di questa teoria filosofica e logica, si costituisce, in ambito aristotelico o protostoico, la teoria delle funzioni dei diversi casi greci, ed è in rapporto a tale teoria che sono sorte varie denominazioni dei casi.

Morfologia e sintassi dei casi, cosí come sono costruite dai greci e trasmesse poi ai latini e a noi, hanno dunque una radice logica.

E non basta. Di nuovo in funzione di interessi logici si compie il primo tentativo di classificazione delle funzioni dei segni linguistici. Perché si parla, a che serve un segno linguistico? Questa domanda, poi diventata una domanda specifica degli studi linguistici, sorge in funzione di un interesse logico. Sorge quando Aristotele deve costruire una teoria del ragionamento e della dimostrazione. A quel punto Aristotele propone di tenere fuori dall'orizzonte della considerazione logica tutti quei discorsi, le preghiere come le esclamazioni, che hanno un valore semantico, ma che non dichiarano come esistente qualche cosa.

E dunque abbiamo una prima classificazione embrionale delle funzioni del linguaggio: la funzione dichiarativa, piú propriamente logico-conoscitiva, e la funzione espressiva, che nella visione aristotelica dovrebbe cadere fuori dall'orizzonte dei logici.

Ancora ai logici antichi, di scuola stoica, dobbiamo la distinzione, ancor oggi fondamentale, di *significante, significato* e *referente* (*Stoic.* 2, 48). La coppia *denotazione-connotazione,* cosí importante negli studi semantici, risale ai logici scolastici ed è ripresa dai logici di Port-Royal, che distinguono tra *denotazione* come indicazione di un'idea chiara e distinta, e *connotazione* come evocazione, dell'alone di idee confuse che accompagna la chiara e distinta indicazione di un'idea primaria.

Venendo a tempi meno lontani, dobbiamo a G. Frege la fondamentale distinzione di *Bedeutung,* riferimento di un vocabolo a una particolare entità extralinguistica, e *Sinn,* capacità di riferimento di un vocabolo a una pluralità di entità, distinzione in parte equivalente a quella che fanno Saussure e i linguisti teorici contemporanei tra *sens* o *signification* da una parte e *signifié* dall'altra. A Quine dobbiamo un'altra importante nozione semantica, quella di *iponimia,* cioè di subordinazione del significato di una parola al significato di un'altra: la subordinazione si ha attraverso un rapporto di inclusione, per cui, per esempio, *scarlatto* è un iponimo di *rosso.* Dalla matematica è passata nella linguistica funzionale hjelmsleviana e strutturalista la nozione di funzione. E, come tra breve avremo occasione di ricordare di nuovo, vengono dalla logica, dagli studi logici contemporanei, nozioni che nella discussione teorica della linguistica oggi sono centrali: tali sono le nozioni di classe, di calcolo e di interpretazione di un calcolo, di generazione.

Finalmente, dalla logica vengono alla linguistica addirittura gli arnesi di cucina, della cucina della linguistica contemporanea. Chi legge il bel lavoro di Franco Lo Piparo, *Linguaggio, macchine e formalizzazione,* vede quanto vastamente e profondamente indebitata è la linguistica teorica d'oggi con gli studi di metamatematica e metalogica. E chi conosce il tipo di lavoro dei cosiddetti semanticisti postchomskiani sa che il loro lavoro di analisi degli enunciati poggia sul modello di analisi in predicati a piú argomenti elaborato da Reichenbach.

8. Per quanto rapidamente e a salti, abbiamo mostrato che c'è una grande quantità di apporti degli studi logici agli studi linguistici. C'è ora da chiedersi perché i linguisti e le scienze del linguaggio hanno potuto trovare nei lavori dei logici tanti spunti da utilizzare. La risposta a noi par chiara. Di piú in piú, a partire da Aristotele, andando fino a

Lewis e ai logici contemporanei, chi si è occupato di logica, prima di logica formale e poi di logica postleibniziana, di logica moderna, ha sempre avuto chiaro anzitutto un primo fatto: occuparsi di logica significa avere a che fare con frasi, con proposizioni, con elementi linguistici o, almeno, con una certa categoria di elementi linguistici, ossia le frasi « ben formate» e/o dichiarative. Ma già parlare di « una certa categoria » comporta cercare di capire come si determina questa categoria, spinge a entrare nel vivo della questione dell'esistenza di diverse categorie di atti linguistici, di frasi, di segni, come è avvenuto a partire da Aristotele in poi.

Fare logica, insomma, comporta almeno un minimo di riflessione sistematica sui fatti linguistici. E, in effetti, non dimentichiamo che *logikè téchne* vuol dire *ars sermocinalis,* « scienza del discorso ».

A questa prima consapevolezza dei rapporti tra riflessione logica e riflessione sul linguaggio si è andata aggiungendo la consapevolezza del carattere di particolare linguaggio proprio della stessa analisi logica.

A partire almeno da Leibniz ha cominciato a diventare chiaro che fare l'analisi logica di una lingua significa costruire, fare funzionare un linguaggio per parlare della lingua. Ogni possibile logica ha a che fare col linguaggio non o non tanto *e parte obiecti,* perché alcune logiche si occupano di linguaggi, ma *e parte subiecti,* perché ogni logica è essa stessa un linguaggio.

Come si sa, già almeno a Leibniz dobbiamo riportare per lo meno il progetto e un inizio di attuazione di due forme tipiche di lavoro della logica moderna: la costruzione di una lingua artificiale, non ambigua, utile per parlare unitariamente e scientificamente delle lingue e delle cose dette nelle varie lingue, e l'idea di inglobare in questa lingua non ambigua una tecnica di manipolazione, di combinazione dei segni. Cioè dobbiamo a Leibniz l'idea di costruire una *characteristica,* o *lingua* (come egli diceva) *universalis,* e una *ars combinatoria,* coordinate tra loro.

Non deve dunque stupire che i logici hanno dato di continuo contributi molto importanti alla comprensione del funzionamento dei linguaggi sia formali sia non formali. In effetti, in una storia delle scienze linguistiche è impensabile fare quello che fanno i coniugi Kneale nella loro *Storia della logica.* È impensabile una storia delle dottrine linguistiche che ignori Aristotele, gli stoici, gli scolastici tardomedievali, i grammatici e i logici Arnauld e Lancelot di Port-Royal, Leibniz. Leibniz, in particolare, non solo è il capostipite della logica moderna, ma è il progettatore e iniziatore delle prime ricerche storico-linguistiche, del primo dizionario storico del tedesco. I suoi *Nuovi saggi sull'intelletto umano* sono non solo ricchi di notazioni molto importanti dal punto di vista logico-filosofico, ma nel terzo libro contengono una classificazione genetica e comparativa delle lingue del mondo ragionevole e, in sostanza, già prossima all'esattezza. E, come quelli già menzionati, nemmeno si possono ignorare i nomi di Frege, di Wittgenstein, di Tarski, Post, Carnap, Ajdukiewicz.

Nonostante questa fitta rete di rapporti storici e teorici, nella formazione istituzionale dei linguisti è mancata a lungo, ed è tuttora carente un'adeguata preparazione in materia di logica. Eppure non è in gioco solo la comprensione storica delle scienze del linguaggio: è in gioco la loro attualità teorica, che dipende largamente da apporti logici.

9. Per capire che cosa può insegnare oggi la logica alla linguistica teorica, basta fermarsi anche solo su qualche punto.

Prima questione è quella della creatività. Come è noto con *creatività del linguaggio* Noam Chomsky ha designato la capacità del linguaggio verbale di costruire un insieme infinito di frasi diverse partendo da un numero finito di elementi. Con un vocabolario comprendente un numero finito di elementi e con un limitato numero di regole sintattiche noi possiamo produrre e comprendere un numero infinito di frasi, infinito nel senso in cui sono infiniti i numeri naturali. Secondo Chomsky, alla base di questa nozione di creatività ci sarebbe la teoria metamatematica delle funzioni ricorsive. In realtà, non c'era e non c'è stato bisogno della teoria delle

funzioni ricorsive, bastava la meno formalizzata arte combinatoria di Leibniz per dare conto di come con un insieme finito si costruisce un insieme infinito di raggruppamenti diversi.

Ma, a parte queste considerazioni, la concezione chomskiana di creatività presuppone necessariamente che l'inventario lessicale di una lingua sia un inventario chiuso, finito. È chiuso e finito l'insieme di parole di una lingua? Sappiamo bene, dai tempi di Orazio, a dir poco, che non è così: l'insieme di parole di una lingua è un tipico insieme aperto. Se teniamo conto di ciò, siamo aiutati a capire meglio le cose da quei logici che hanno elaborato una nozione di creatività ben diversa da quella chomskiana. Accanto alla teoria delle funzioni ricorsive, accanto all'*ars combinatoria,* i logici, gli studiosi di metamatematica, per esempio Post, si sono occupati di quei sistemi, come ad esempio l'aritmetica, in cui non tutte le proposizioni accettabili, perché empiricamente non falsificate, sono decidibili. Tali sono, ad esempio, le congetture di Goldbach (impropriamente dette spesso, anche da cultori di logica, *la* congettura di Goldbach). Si tratta di un fatto del massimo interesse teorico. Anche in sistemi altamente formali, in cui quasi tutto, per così dire, è deducibile da assiomi, una volta posti questi assiomi, vi sono proposizioni, come le due congetture, che non sono state mai falsificate, e che, pertanto, sono empiricamente accettabili, ma che non sono dimostrabili. Questi sistemi, studiando la non decidibilità, sono stati chiamati da Post *creativi.* Vedete che c'è un diverso statuto del termine *creatività,* divergente da quello chomskiano: creativo è un sistema che ammette la costruzione di frasi di cui non è decidibile la grammaticalità, di frasi non calcolabili che, tuttavia, sono accettabili.

Un altro logico, Patrick Suppes, ha usato *creatività* in modo ancor più interessante per noi che ci occupiamo di linguaggi storico-naturali. Ha usato *creatività* nel senso in cui saremmo proprio tentati di usarlo in riferimento alle lingue storico-naturali, *creatività* come apertura dell'inventario lessicale di base. Uno degli assiomi metateorici introdotti da Suppes è l'*assioma di non creatività,* per cui nelle proposizioni derivate in un sistema assiomatico tutti i termini devono essere derivabili dagli assiomi, ossia perché le proposizioni siano tutte definibili e calcolabili, non devono esservi termini nuovi, imprevisti. Un sistema è interamente calcolabile se è non-creativo, se non vi sono ammessi tutti quei neologismi e forestierismi, tutti quegli stravolgimenti, quiproquo o meditate innovazioni che sono tipici delle lingue storico-naturali. Le quali, dunque, sono creative dal punto di vista di queste altre teorie logiche piú recenti.

Secondo punto teorico nodale: per noi esseri umani è ovvio che con la lingua parliamo della lingua, che una parola designa tanto delle cose, eventi ecc., quanto, a volte, se stessa. Queste due proprietà strettamente interrelate, la riflessività del linguaggio verbale e la autonimicità virtuale di tutti i suoi vocaboli, sono in realtà proprietà eccezionali. È dai logici degli anni trenta che abbiamo appreso come sia eccezionale che la lingua possa venire a costruire frasi che parlano della lingua stessa senza che le frasi siano incoerenti rispetto alla sintassi. Come i logici sanno bene dagli anni trenta, anche nei sistemi formali sono possibili degli usi metalinguistici, ma danno luogo a proposizioni variamente incoerenti o non decidibili.

Ecco dunque che questa distinzione tra *lingua oggetto,* cioè lingua che mi serve per parlare delle cose, e *metalingua,* cioè lingua che mi serve per parlare di una lingua, o, come credo che sia piú corretto dire, questa distinzione tra *uso linguistico* e *uso metalinguistico* di un segno, già intravista dalla logica scolastica, diventata centrale nel dibattito logico metamatematico del 900, è fondamentale per capire piú a fondo nella sua peculiarità il linguaggio.

Vorrei in terzo luogo ricordare che noi dobbiamo una esperienza fondamentale ai matematici piú rigorosi dal punto di vista formale e ai logici. Chi conosce meno da dentro gli strumenti formali rischia di innamorarsene e di non vederne il limite. Negli anni sessanta hanno avuto grande voga tra i linguisti ondate di speranza nella possibilità di rendere interamente formalizzate, cioè eseguibili da una macchina, e sia pure da una macchina teorica, tutte le operazioni di analisi e di descrizione dei segni di una lingua. Noi dobbiamo a gruppi di matematici come i Bourbaki e soprattutto ai logici polacchi e tedeschi degli anni trenta la acquisizione in termini formali, la acquisizione in termini non intuitivi, ma di teorema, dei limiti della formalizzazione stessa. Nel volume di Piaget *Logique et connaissance scientifique* un lungo capitolo, molto bello e molto chiaro, è intitolato appunto *I limiti della formalizzazione.* Ma di straordinaria chiarezza sono anche le pagine iniziali della *Teoria degli insiemi* di Bourbaki in cui viene esposto formalmente quello che, di nuovo, già Leibniz aveva capito. Quando Leibniz introduce la definizione di definizione, spiega con molta chiarezza che, per costruire un calcolo, deve adoperarne i termini in modo coerente alle definizioni e che queste definizioni sono fatte di parole. Certo, possiamo trasformare in termini queste parole, definendole a loro volta con altre parole. Ma, a un certo punto, se non vogliamo regredire in una mala infinità, dobbiamo fermarci. A un certo punto, che è il punto imposto dalle esigenze della tecnica che vado a costruire, adopero le parole delle lingue storico-naturali nell'accezione corrente e non definita, intuitiva che tutti adoperiamo. Cioè, la matrice ultima di qualsiasi costruzione formale, come è stato detto molte volte negli anni venti e trenta, è pur sempre una lingua storico-naturale, non formale essa stessa. Cosicché proprio da un'autentica, profonda esperienza di studi logici, formali, viene la spinta decisiva a capire che una lingua storico-naturale non è formale e non è interamente descrivibile con procedure interamente formalizzate, ma è esplorabile e studiabile a fondo solo ricorrendo a tutte le risorse, anche informali, del linguaggio comune.

È soprattutto ai logici, a partire dai portorealisti e da Leibniz fino a Wittgenstein e Black, che noi linguisti siamo debitori di un'altra nozione, anch'essa oggi fondamentale, la nozione di indeterminatezza del significato delle lingue storico-naturali. A parte rarissime eccezioni (come Antonino Pagliaro), la indeterminatezza, che è caratteristica del significato delle parole delle lingue storico-naturali, ha impegnato soprattutto l'attenzione dei logici. I linguisti, per la maggior parte, hanno pensato e ancora pensano di poter determinare l'indeterminabile, cioè il significato delle parole.

10. Il contributo degli studi linguistici agli studi logici è molto piú modesto, nonostante nella linguistica teorica contemporanea alcune nozioni possano essere interessanti dal punto di vista degli studi logici piú recenti.

Mi limiterò a ricordare che, per esempio, ci sono stati linguisti (Hjelmslev, Prieto) i quali hanno precisato la nozione di arbitrarietà di ogni classificazione, la nozione di incalcolabilità degli spostamenti di senso attraverso il tempo (Saussure) e, finalmente, la nozione di dipendenza sociale dei sistemi di classificazione e, quindi, delle lingue (Saussure, Prieto).

Ora, soprattutto la prima e la terza nozione, in quanto dicono che una classificazione è fatta in un certo modo non perché obbedisca a regole imposte dagli elementi classificati, ma in funzione di un fine, cioè la sottolineatura del carattere arbitrario e quindi non determinato, ma finalistico delle classificazioni, è certamente di qualche interesse per la logica piú nuova. Con « logica piú nuova » mi riferisco a quella che non è piú una logica « senza soggetto ». Fino alla scoperta dei limiti della formalizzazione si è potuto sperare in una autofondazione della logica. Oggi, sembra, a detta dei logici stessi, che questa speranza sia entrata in crisi, nel senso che la scoperta dei limiti formali delle formalizzazioni, cui ho accennato, ha spinto i logici verso un punto di vista costruttivistico, verso il concepire la logica come una costruzione per parlare in un certo modo di certe parti dei discorsi, come una costruzione finalizzata a fini determinati. Adottare questo punto di vista significa sollevare una serie di problemi. Significa sollevare il problema della arbitrarietà delle classificazioni della logica rispetto al linguaggio oggetto, della finalizzazione della costruzione logica e quindi del rapporto con il soggetto che costruisce la logica.

In altre parole i logici, inoltrandosi su questo terreno, stanno cominciando a scoprire una dimensione nota e battezzata, ma ancora poco esplorata: la dimensione del rapporto tra segni e utenti dei segni che, dagli anni trenta in poi, noi chiamiamo pragmatica. Inoltrandosi in questa direzione pragmatica, potrebbero servirsi non inutilmente dei contributi delle scienze linguistiche. A mia conoscenza, a parte Bar-Hillel e Lewis, non sono molti i logici che se ne servono, come del resto già abbiamo detto (cfr. il punto 4).

11. Concludo, rapidamente, con alcune prospettive e proposte di interdisciplinarità, o meglio di dinamica unificazione di ricerche oggi mal separate.

A livello teorico e di ricerca avanzata, dobbiamo creare un luogo istituzionale di incontro tra scienze logiche e scienze linguistiche. Questo luogo, sulla base di quanto ho detto, pare essere la teoria dei diversi linguaggi, naturali e artificiali, informali e piú o meno formali.

Questa teoria dei linguaggi ha un nome, almeno per i linguisti, e il nome è *semiologia* o *semiotica*. Ne ha addirittura già due per i linguisti. Ma non è questione di bandiera e di nomi. L'importante è costruire una teoria generale dei tipi di linguaggio, dei sistemi di comunicazione e di simbolizzazione, e nella costruzione di questa teoria studi logici e studi linguistici non possono non confluire.

12. Ma non solo in sede di ricerca avanzata, anche dal punto di vista didattico è molto utile, anzi è indispensabile armarsi di armi interdisciplinari. Chi vuole seguire bene il processo di maturazione linguistica degli allievi, deve munirsi non solo di strumenti di derivazione letteraria, come avviene normalmente nella nostra *institutio,* ma anche di strumenti di natura matematica e, piú specificamente ancora, logica. Diciamo perché.

Per capire e seguire il processo di acquisizione delle strutture linguistiche negli allievi, noi abbiamo a che fare anche con problemi di gusto espressivo, ma abbiamo a che fare anzitutto con un apparato di termini e di concetti linguistici e grammaticali che dobbiamo conoscere per analizzare, studiare, seguire scientificamente la ricerca linguistica degli allievi. Ora, come abbiamo visto, si tratta d'un apparato che è di derivazione largamente logica. Inoltre, il processo di crescita linguistica consiste nell'arricchimento del vocabolario, nell'arricchimento delle capacità di costruire proposizioni e rapporti tra proposizioni: in esso, come Vygotskij e Piaget hanno mostrato, e come sempre piú va diventando chiaro, sono coimplicate capacità linguistiche e capacità di costruzione e di associazione di schemi, cioè capacità piú propriamente raziocinative e logiche.

Come si vede, per chi si occupa di educazione linguistica il rapporto con la logica si ripropone due volte. Ma anche per chi si occupa della crescita delle capacità logico-matematiche (una pianta assai delicata, ha detto una volta Lucio Lombardo Radice) si propone il rapporto con la dimensione linguistica dei fatti.

La capacità logico-matematica è una capacità fondamentalmente linguistica; una logica, un ramo delle matematiche sono un modo di organizzazione di un insieme di simboli, sono un linguaggio. Ed è nell'alveo del generale sviluppo delle capacità simboliche e linguistiche, intese correttamente, scientificamente, e non come mera capacità di bello stile, che scorre anche la crescita delle capacità logico-matematiche.

Occhio al linguaggio, dunque, per chi insegna matematica. Ecco un insegnamento della logica moderna.

Ancora una volta, come nell'ambito della ricerca piú avanzata, cosí nell'ambito delle pratiche educative, l'interdisciplinarità stimolata dalla logica non è giustapposizione e, magari, confusione di aspetti matematici e aspetti linguistici, ma è promozione e sviluppo di ricerche e atteggiamenti scientifici ed educativi fondati sull'unità, sulla scoperta e all'approfondimento e la costruzione attiva dell'unità della cultura.

Gabriele Giannantoni

Logica e storia della filosofia

Credo che mi tocchi innanzitutto l'obbligo di chiarire il titolo di questa mia esposizione, e cioè *Logica e storia della filosofia*. Un titolo di questo genere potrebbe dare adito ad una discussione dei criteri e dei metodi, in base ai quali mettere in relazione la logica e il suo sviluppo con la storia della filosofia, per vederne le implicazioni reciproche nelle varie fasi. Ma sarebbe una impostazione, in certa misura, particolare, nel senso che avrebbe piuttosto meritato il titolo di *storia della logica e storia della filosofia*.

Il senso, e anche quindi il tema di questa conversazione, è piuttosto quello di esaminare, sulla base di alcune esperienze particolarmente rilevanti, di alcuni nodi problematici particolarmente significativi, quali elementi noi possiamo acquisire dalla storia della filosofia, da alcuni momenti della storia della filosofia, per una determinazione rigorosa non già di che cosa sia la logica in astratto, ma della molteplicità dei significati e degli esiti che storicamente ha avuto ciò che noi intendiamo con il termine di logica.

Una determinazione quindi in partenza prudente, ma anche l'esigenza di ritrovare un criterio, un punto di orientamento che ci permette di valutare, storicamente naturalmente, il perché la logica abbia avuto piú esiti, perché storicamente si sia inteso piú cose, spesso molto diverse fra loro, con il termine di logica, e quindi fare un'ipotesi non soltanto di ricerca storica ma anche di orientamento teorico.

Del resto affrontare la questione da questo punto di vista significa anche partire da una constatazione di carattere piú generale. La filosofia sembra essere oggi rimasta senza oggetto, né sembra che abbia piú nulla di cui occuparsi, se è vero come è vero che nel corso dell'età moderna essa è venuta perdendo, con il sorgere delle scienze particolari, tutti quei campi su cui tradizionalmente si veniva applicando.

Scienze particolari che hanno acquisito una piena autonomia, di metodo, di ricerca, di delimitazione, di fondamenti, e che quindi hanno preso interamente il posto delle antiche partizioni della filosofia. Non piú filosofia della natura, non piú psicologia filosofica, non piú filosofia della politica, ma invece scienze positive: la fisica, la psicologia, la politica, e altre partizioni classiche della filosofia sono cadute o si sono esaurite: la metafisica, l'ontologia e cosí via.

Dunque, di che cosa si occupa oggi la filosofia? Su quali terreni è competente il filosofo? Quali sono i campi della sua ricerca che giustifichino ancora l'autonomia di una presunta disciplina che si chiama filosofia rispetto a questo sorgere, che è in fondo un aspetto essenziale della laicità della cultura moderna, delle scienze particolari rispetto a questa « regina delle scienze », che sembra ormai spodestata?

In effetti nella filosofia moderna da Hegel in poi si parla molto della « morte » della filosofia. Ed è indubbio che in un certo senso, cioè nel senso di una arcaica concezione della filosofia, quella definibile poniamo con una formula che già Platone conosceva, come « scienza di se stessa e delle altre scienze », certamente questa filosofia è morta. Ma in un altro senso (e quale sia questo dovrà risultare da questa conferenza e da questo dibattito) credo che sia prematuro e ingiustificato parlare di una morte della filosofia.

Per entrare in argomento e per trovare subito un addentellato col seminario di logica che è stato svolto nelle settimane passate, vorrei richiamarmi a quella che è oggi forse la maggiore delle storie della logica condotte dal punto di vista della moderna logica formale, cioè la *Storia della logica* scritta dai coniugi Kneale nel 1962 e tradotta in italiano da Einaudi

nel 1972. Un'opera che per ambizioni di vastità, di prospettiva storica è stata piú o meno avvicinata a quella ottocentesca e famosa di Prantl e che ha avuto molta fortuna perché in una decina di anni è arrivata alla quinta edizione.

In questa *Storia della logica,* gli autori iniziano il primo capitolo con queste parole che vi leggo testualmente: « La logica tratta i princípi dell'inferenza valida » (possiamo ritenere questa espressione piú o meno identica a quella con cui, nella sua lezione, il prof. Freguglia definiva la logica come la scienza, la trattazione dei princípi e delle regole del corretto dedurre). Perché la logica non è semplicemente ragionamento valido, ma è riflessione intorno ai princípi della validità, essa non potrà non sorgere che quando già si disponga di una buona quantità di inferenze, argomentazioni e ragionamenti. Non ogni tipo di discorso provoca l'esame logico. Ad originare la ricerca logica sono quei tipi di discorso e di ricerca ove si cerca e si chiede la dimostrazione e la prova. Infatti dimostrare una proposizione è inferirla validamente da premesse vere.

Naturalmente subito dopo gli autori si preoccupano di sottolineare l'indipendenza tra le due condizioni della dimostrazione, cioè la verità delle premesse e la validità delle inferenze: dico l'autonomia di queste due condizioni, perché è noto che possono esserci inferenze valide anche da premesse che non siano vere. Cioè: la validità dell'inferenza è qualche cosa che riguarda la forma del ragionamento, i modi della deduzione, e non il contenuto di verità o di falsità delle premesse. E naturalmente anche qui il precedente immediato a cui questi autori si rifanno è la famosa distinzione tra « apodittica » e « dialettica » che ritroviamo agli inizi degli *Analitici* primi di Aristotele.

« Apodittica » è la deduzione che parte da premesse vere che arriva a conclusioni vere, « dialettiche » è l'inferenza, da premesse probabili, di conclusioni soltanto probabili. Ciò non toglie che « apodittica » e « dialettica » si servano della stessa forma di ragionamento, la sillogistica, la quale è in se stessa valida.

Lasciamo stare per il momento questo ulteriore aspetto della questione, cioè la distinzione tra validità della inferenza e verità delle premesse e delle conclusioni. Teniamo ferma la già vista definizione, dal momento che è sulla base di essa che William e Martha Kneale scrivono appunto una *Storia della logica,* la quale, sia pure indulgendo ad una certa (come essi stessi la chiamano) curiosità antiquaria, cioè di andare a ricercare teorie, formalizzazioni, presupposti di formalizzazioni, anche là dove esse non presentino aspetti di particolare novità e interesse, nel passato approda a risultati talvolta sorprendenti, e non tanto perché quasi la metà di questa *Storia* è riservata agli ultimi novant'anni. Già questo può apparire sorprendente, cosí come può apparire sorprendente il fatto che la storia della logica si presenti agli autori, per i secoli precedenti, come una pianura appena increspata da qualche collina e sulla quale si stagliano solo due montagne, altissime ma solitarie: Aristotele e Leibniz. La realtà è che quella definizione di logica che abbiamo prima richiamata è assunta dagli autori come il criterio in base al quale si accoglie nella *Storia* tutto ciò che la prepara e la elabora, e si esclude tutto il resto, anche se questo resto si chiama Bacone, si chiama Galileo, Cartesio, Locke, Hume, Kant, Hegel, Marx.

Certo, gli autori risponderebbero a questo rilievo che ciò che essi lasciano fuori è qualche cosa di altro da ciò che costituisce l'oggetto della loro ricerca. Ma il problema nasce proprio qui, giacché non è certo sostenibile, almeno a una prima approssimazione della questione, l'estraneità dei filosofi ora ricordati allo sviluppo di ciò che invece storicamente si è ritenuto come logica.

Non voglio certamente entrare in una discussione di carattere generale di teoria della storiografia, ma certo è che in nessun altro campo della ricerca storica un tale criterio potrebbe essere ammesso senza gravi conseguenze. Se noi prendessimo un libro intitolato *Storia dell'economia politica* e, per il fatto che i suoi autori sono, poniamo sostenitori delle tesi mercantilistiche, trovassimo lí dentro soltanto la storia del mercantilismo, noi certo avremmo qualche dubbio; se il

titolo invece fosse *Storia del mercantilismo* naturalmente la ricerca sarebbe perfettamente legittima.

Anche limitando l'osservazione a questo ambito molto preliminare, noi non ci possiamo allora stupire se anche questa *Storia della logica* (di cui io non voglio apparire denigratore nel senso che è poi un contributo molto importante allo studio di questa interpretazione della logica) anche sul piano storico incorra in singolari fraintendimenti. Prendiamo il caso di Aristotele. Ci troviamo di fronte al fatto curioso di un autore che per un verso sarebbe il primo teorico dei princípi e delle forme dell'inferenza valida, la sillogistica, ma per altro verso finirebbe pe rapparire, a chi lo legga nei suoi trattati, un autore singolarmente inconsapevole dell'importanza della sua scoperta, se è vero come è vero che non si trova un solo caso, in tutti i suoi scritti, in cui il suo ragionamento sia sviluppato nella forma del sillogismo.

Allora può nascere il dubbio che per Aristotele le cose stessero diversamente dall'essere il puro e semplice precursore e scopritore di una accezione della logica che si è sviluppata solo negli ultimi novant'anni. E che le cose stessero quindi diversamente da come questi autori l'interpretano.

Ma se si introduce questo dubbio quali conseguenze allora ne possono derivare, non solo per la storia della logica, ma anche per l'assunzione stessa di quella definizione? Giacché non c'è dubbio che l'assumere quel concetto di logica implica con ciò stesso una molteplicità di modi di intendere la logica, di cui uno solo poi è considerato valido. Ma come è stata possibile questa molteplicità? E quali sono i criteri in base ai quali un solo modo di considerare la logica può essere ritenuto valido?

Sono domande alle quali, se non si vuole cadere nell'arbitrarietà delle opinioni personali, o in quello che Bacone chiamava *idola theatri,* si può rispondere solo sul piano della considerazione storica, ed è con questo approccio storicistico allora che l'arbitrio può essere tolto, e possono essere ritrovati sia la ragione della molteplicità, sia il criterio della scelta.

Vorrei soffermarmi in questa conversazione su un punto per fornire un elemento di riflessione e di discussione su come in questo senso la storia della logica può aiutare anche ad una comprensione di che cosa sia la logica, se posto in relazione con un concetto adeguato della storia della filosofia.

Se noi vogliamo affrontare la questione dal punto di vista che ho ora detto, non c'è dubbio che il problema stesso dell'inizio della logica diventa difficile e complesso, perché noi dobbiamo sospendere ogni tentativo di far cominciare la logica là dove noi ritroviamo per la prima volta ciò che noi intendiamo per logica. Ma non abbiamo neppure il criterio oggettivo — o almeno storicamente oggettivo — che solitamente viene seguito quando si fa storiografia di determinati concetti o discipline, cioè di partire da dove abbiamo le prime documentazioni del termine o del gruppo dei termini che designano questa disciplina.

Se noi prendessimo in considerazione questi termini, e innanzitutto il termine *logiké* nel linguaggio greco, noi arriveremmo subito alla conclusione che, poiché questo termine lo ritroviamo per la prima volta soltanto nei testi degli stoici, la storia della logica inizierebbe saltando a piedi pari quello che tradizionalmente viene considerato uno degli autori maggiori di logica, e cioè Aristotele. E non c'è dubbio che questa conclusione apparirebbe paradossale a chiunque, e tale da farci abbandonare il rigore di quel criterio.

Ma se noi vogliamo includere anche Aristotele in questa logica come pare assolutamente doveroso, allora dobbiamo intendere Aristotele nella genesi del suo pensiero, e nel contesto delle polemiche e del dibattito culturale e teorico in cui la sua opera è nata, cioè come un momento di un processo che deve essere ricostruito nella sua storia, e non come l'oggetto di una curiosità antiquaria in cui ritrovare le tracce e gli scavi di un edificio che è stato costruito soltanto di recente. E nel quale poi si ritroverebbe per un evento del tutto straordinario, ed in forma singolarmente elaborata l'antecedente di ciò che noi oggi sappiamo.

Non c'è dubbio che la genesi della sillogistica aristotelica va ricercata nella polemica contro le due fondamentali posizioni di pensiero che storicamente Aristotele aveva di fronte: da un lato nella polemica contro la dialettica platonica, e dall'altro nella polemica contro la retorica sofistica. I suoi scritti offrono abbondante documentazione di questo.

La polemica contro la dialettica platonica si muove su due piani: da un lato, in quanto quella che Platone considera come la scienza suprema dell'essere si presenta, appunto, come dialettica, cioè come un'arte della discussione, un'arte — diceva Platone — del « dare » e del « chiedere ragione », laddove per Aristotele la dialettica è invece solo l'argomentazione probabile, proprio perché quando si discute ci si muove sul piano delle opinioni, mentre lo scienziato, purché proceda da premesse vere, può anche essere solo per dedurre e argomentare. Ma soprattutto la polemica contro la dialettica platonica è caratterizzata dal fatto che questa dialettica si presenta come una scienza della « divisione »: la divisione dei generi nelle specie, delle specie nelle sottospecie, fino a raggiungere quella che Platone chiamava l'*atomos idea,* cioè l'idea indivisibile, non piú ulteriormente soggetta al procedimento dieretico, e che quindi costituisce ciò che si cercava, il risultato della ricerca.

Ad Aristotele il procedimento della « divisione » sembra del tutto arbitrario, perché quando si divide, e si deve scegliere o l'uno o l'altro delle due parti in cui c'è stata la divisione, già si deve sapere da che parte sta quello che si vuole continuare a cercare. Cioè, per mettere in relazione due termini, o due concetti — lascio la cosa generica perché in Aristotele è ancora indistinta — noi non possiamo basarci soltanto su questi due termini o concetti, ma, dice Aristotele, abbiamo bisogno di un terzo termine che abbia una determinata relazione con quei due, e che li metta in collegamento: ecco il concetto di « medio », ecco l'idea della scienza come mediazione, come ragionamento, e quindi come qualche cosa di discorsivo, o « dialettico », se per dialettica si intende appunto la necessità che l'opposizione di due termini, per essere realmente compresa, debba essere mediata.

Sottolineo questo aspetto perché lo scopo che io voglio raggiungere, attraverso questa esposizione, è di far vedere quanto ricca anche di questioni sviluppate in epoca moderna sia questa problematica ancora embrionale per un certo verso, ma per un certo verso già molto matura di Aristotele. E del resto, il concetto della mediazione in Aristotele si ricollega a quella che egli considera l'argomentazione non conclusiva per eccellenza, cioè il ragionamento all'infinito. E la critica del ragionamento all'infinito e la teoria del medio sono due elementi organici della concezione della dialettica per esempio hegeliana.

Dall'altro lato sta la polemica contro la retorica sofistica, sia perché la retorica sofistica mira alla persuasione in base all'opinione, e quindi non alla dimostrazione in base alla verità, sia perché la retorica sofistica si presenta essenzialmente come equivocità, come equivoco. L'analisi che Aristotele compie nei *Topica* e negli *Elenchi sophistici* è appunto incentrata sull'idea che i sofisti non adoperano una reale mediazione nelle loro argomentazioni capziose, perché in realtà i termini attraverso i quali si sviluppa la loro argomentazione non sono tre, ma quattro: in esse il medio è equivoco, cioè può significare due cose, cioè abbiamo quella che i logici medievali chiamarono una *quaternio terminorum*, e dove c'è *quaternio terminorum* il sillogismo è apparente ma non reale.

Ricordo un esempio, fatto da uno studioso di questi problemi, di un sillogismo interessante da questo punto di vista, un sillogismo che diceva: « tutte le cose ricercate sono care di prezzo », « i diamanti a poco prezzo sono ricercati », quindi « i diamanti a poco prezzo sono a caro prezzo ». È intelligente come esempio, ma è evidente la *quaternio terminorum*. Perché qui il concetto di « ricerca » è per un verso la ricerca nel senso delle leggi economiche, del rapporto tra domanda e offerta che determina l'aumento del prezzo; nell'altro invece è quella ricerca che cerca di smentire le leggi economiche, perché cerca la speculazione o per lo meno un acquisto che non rientri nei prezzi determinati dalle leggi economiche. È, appunto, una *quaternio terminorum*.

Ora è in relazione sia alla dialettica platonica, sia alla retorica sofistica che Aristotele si propone di elaborare un

tipo di ragionamento che eviti la *quaternio terminorum*, cioè eviti l'equivocità e dall'altro sia fondata sull'idea del « medio ».

A fondamento della teoria aristotelica sillogistica c'è la teoria aristotelica della predicazione, cioè della possibilità di unire un soggetto e un predicato. Questa possibilità era un grosso problema per i logici antichi, ed è un grosso problema anche per i logici moderni. Piú di un filosofo o anteriore o del tempo di Socrate aveva sostenuto che non è possibile formulare giudizi in cui il predicato sia diverso dal soggetto. È possibile formulare giudizi soltanto del tipo « l'uomo è un uomo », il « buono è buono », ma mai formulare un giudizio del tipo « l'uomo è buono ». Perché se si fosse ammessa la possibilità di unire ad un soggetto una molteplicità di predicati il risultato sarebbe stato che si sarebbe reso identico l'uno e i molti, e questo era sentito immediatamente come un assurdo.

Qual era il presupposto di questa teoria, e qual è quindi la polemica filosofica, la polemica logica che Aristotele deve condurre per affermare la possibilità della predicazione? Questa è una ricostruzione a mio avviso estremamente interessante, perché — se l'amico Lombardo Radice mi consente — fa apparire assai meno moderne di quanto solitamente non si ritengano tante teorie della logica moderna. E ne vorrei dare qui un esempio.

La teoria aristotelica della predicazione è fondata solo in quanto — dice Aristotele — « dell'essere si parla in molti sensi ». Una delle formule classiche della sua metafisica, ma anche della sua logica. Perché Aristotele dice che dell'essere si parla in molti sensi! Che vuol dire questa formula?

Tutti voi avete presente la dottrina aristotelica delle categorie o predicati.

Quando si dice che per Aristotele le categorie sono dieci (la sostanza, la qualità, la quantità, e cosí via) sfugge di solito il fatto che la prima di queste categorie, cioè di questi predicati è propriamente il soggetto. Come è possibile che Aristotele consideri come predicato piú importante di tutti proprio ciò che egli definisce come tale che tutto il resto si predica di esso, ma esso stesso non si predica di niente altro, cioè il soggetto?

Ora la risposta a questo credo che debba essere trovata nel fatto che le categorie di Aristotele si presentano come risposte alla famosa domanda socratica: « che cos'è? » la domanda è del tipo: « che cos'è la giustizia? » « che cos'è la bellezza? » « che cos'è la virtú? ». E Aristotele dice: quando noi rispondiamo alla domanda « che cos'è » una determinata cosa, questa risposta richiede prima di tutto di sapere se ciò di cui noi chiediamo « che cos'è » sia una realtà o no, e poi se ha qualità, quantità, e cosí via. Cioè le categorie sono i diversi modi in cui noi parliamo di quell'essere che è contenuto nella domanda « che cos'è ». È una sostanza, è una qualità, è una quantità? e cosí via.

Questo è molto interessante perché ci spiega, da questo ambito del linguaggio e della discussione socratica, la formazione di tutto il linguaggio tecnico logico di Aristotele. Ma mi fermo su questo.

Ma il fatto che « dell'ente si parli in molti sensi » che cosa significa? Se Aristotele enuncia questa formula è perché, evidentemente, c'era qualcuno che dell'ente parlava « in un senso solo ». E gli studi piú recenti che sono stati fatti sulla storia della logica antica, a partire da quelli di Reinhardt fino ai piú recenti di Calogero, mi pare che abbiano illuminato molti punti che consentono di chiarire questa questione. La formula che « dell'essere si parla in molti sensi », e che quindi è possibile un linguaggio articolato, e quindi anche un ragionamento articolato, sull'essere, è il punto di arrivo di una critica che è stata poi dimenticata per lungo tempo e faticosamente recuperata in epoca moderna, è il punto culminante, cioè del processo di dissoluzione della mentalità arcaica e della logica arcaica, e in modo particolare di quella che ne è l'espressione piú importante: cioè la filosofia di Parmenide. Allora dobbiamo fare un passo indietro.

Se prendiamo in esame i testi dei piú antichi filosofi greci, di cui ci sono rimasti frammenti autentici, cioè per esempio, di Eraclito, di Parmenide, abbiamo una conferma

immediata di un dato, che poi la storia delle civiltà piú antiche, l'antropologia culturale ecc. ci hanno ormai reso familiare, e cioè la presenza nelle società arcaiche di una persistente mentalità magica. Che cosa significa mentalità magica? Significa la fiducia che si possa modificare e influire sulle cose attraverso la espressione di una determinata formula. Il linguaggio ha un potere magico proprio perché evoca una natura profonda delle cose, e proprio perché ha questa capacità di evocare la natura profonda delle cose, ha riflesso, influenza, sulle cose stesse.

Quando per esempio i greci invocavano gli dei amavano mettere dopo il nome della divinità l'epiteto che era piú affine al tipo di preghiera che volevano rivolgere. Se erano in viaggio si rivolgevano a Zeus ospitale, se erano in guerra si rivolgevano o ad Atena o ad Ares a seconda che volessero stimolare la guerra oppure calmarla con epiteti acconci, e cosí via. Questi epiteti, tuttavia, erano di numero limitato, e c'era sempre l'insicurezza di pronunciare quello giusto cosí che spesso ricorre nelle formule di invocazione greca una formula di questo tipo: Zeus, ospitale, o come tu preferisca essere chiamato. Cioè fai finta che te li abbia detti tutti gli epiteti e tu dai ascolto a quello che una volta pronunciato suscita in te la volontà di esaudire il mio desiderio. Perché il pronunciare la formula ha appunto questa capacità magica. E del resto questo risponde anche alla concezione piú profonda dell'etimo che avevano i greci. L'etimo non è la ricerca del significato originario da ritrovare attraverso una ricerca storica di un termine, ma il significato profondo, quello che svela la natura della cosa significata da quel nome. Elena non poteva che tradire il marito, e non poteva che causare la guerra, perché il suo nome vuol dire colei che distrugge le navi. Apollo non può che mandare la pestilenza perché il suo nome esprime distruzione (il che è sbagliato come etimologia storica, perché Apollo non è termine indoeuropeo, ma i greci lo sentivano come derivato dal verbo *apollym* che vuol dire distruggere, quindi se un dio si chiama distruttore deve distruggere).

Ora questa concezione, cosí sommariamente indicata, noi la ritroviamo frequentemente nei frammenti dei filosofi antichi, la troviamo per esempio in Eraclito. Eraclito dice che l'arco ha nome « vita » e opera « morte »: e infatti l'arco è un'arma e serve a uccidere, e quindi il suo *ergon,* la sua attività, è quella di uccidere; però esso si chiama *biós* (ora noi facciamo una distinzione netta tra *biós* (arco) e *bíos* (vita), ma nell'accentuazione presumibile dei greci la cosa era molto piú sfumata) e proprio a questo Eraclito volge la sua attenzione, che cioè questo oggetto che si chiama « vita », però uccide, e siccome il nome coglie la natura profonda della cosa non meno della sua attività, che la natura dell'arco è contraddittoria. Quando ancora Eraclito diceva che « una e la stessa è la via all'in su e la via all'in giú » egli voleva probabilmente dire una cosa piú semplice di quella concezione dei cicli cosmici che poi gli stoici vi videro simboleggiata, e cioè che c'è una strada che si chiama « salita », però se la si fa in un senso è salita, se la si fa nell'altro è discesa. Si chiama salita ma può essere sia salita che discesa. Anche qui il nome è contraddittorio rispetto ad un aspetto delle cose. Ancora: il famoso frammento del fiume: « nello stesso fiume siamo e non siamo », da tutti interpretato nel senso che lo scorrere del fiume simboleggerebbe una teoria del divenire, ma di cui Seneca ci dà l'aggiunta essenziale « il nome del fiume rimane sempre lo stesso, l'acqua è sempre diversa ». E ancora una volta c'è un contrasto tra il nome e la cosa. Questo pare ad Eraclito qualche cosa di assolutamente nuovo, che gli fa tracciare la sua teoria della guerra come padre (in italiano dovremmo dire madre) di tutte le cose. Potremmo continuare nell'esemplificazione.

Ma questo non è proprio soltanto di Eraclito. Anche in una scuola scientifica noi ritroviamo l'eco di questo modo di porre le cose. Pensate per esempio a come si è formata l'idea del numero irrazionale. Questa è un'idea che nasce in ambienti pitagorici in relazione allo studio delle potenze.

Immaginate un triangolo rettangolo in cui un lato sia contrassegnato da quattro sassolini (che era il modo con cui

gli antichi greci facevano le figure geometriche, quei sassolini erano gli *horoi,* cioè i *fines,* i confini, da cui poi la metafora della definizione) e un altro lato contrassegnato da tre sassolini.

In base al teorema di Pitagora il quadrato costruito sulla ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti. Un lato $4^2 = 16$, l'altro lato $3^2 = 9$, la loro somma $16 + 9 = 25$: i pitagorici andavano tranquilli e mettevano sulla ipotenusa 5 sassolini. Il quadrato costruito sull'ipotenusa è 25, la radice quadrata di 25 è 5.

Ma facciamo il caso di un triangolo rettangolo isoscele: posto che i due lati uguali fossero marcati ciascuno da 3 sassolini, la somma dei loro quadrati è 18. Ma qual è la radice quadrata di 18? Non si possono mettere quattro sassolini perché il quadrato sarebbe 16, non se ne possono mettere 5 perché il quadrato sarebbe 25. Si dovrebbe mettere un numero di sassolini intermedio fra il 4 e il 5. Non è possibile, non c'è. Non c'è? Ci deve essere. Però è un numero che, secondo i pitagorici, non sappiamo esprimere, è un numero *alogos,* che poi è stato tradotto con *irrationalis,* un termine che, ovviamente, non ha nessun rapporto con l'irrazionalità, ma esprime solo il caso stranissimo di un numero che ci deve essere, ma del quale non abbiamo il nome.

Questo tipo di mentalità è quello che sta alla base della filosofia di Parmenide. E Parmenide è in questo senso colui che piú rigorosamente pone quelle che sono le condizioni dell'assoluta esprimibilità, pensabilità e realtà di qualunque cosa.

Quando è che una cosa è assolutamente vera? Quando di quella cosa non si può nello stesso tempo dire che è e che non è. Perché, se si può dire che è e che non è, è contraddittoria. Ma che cos'è che si può dire che è, escludendo assolutamente ogni non essere? In qualunque giudizio noi pronunciamo, in cui compaia il verbo essere, questa contraddizione è presente. Quando noi diciamo che Achille è valoroso, nel dire che *è* valoroso diciamo nello stesso tempo che *non è* vigliacco. E quindi *è* e *non è*. E allora se noi vogliamo pronunciare un *è* da cui sia assolutamente assente qualunque *non è*, noi dobbiamo limitarci a pronunciare « *è* », senza soggetto, senza predicato. Questa è l'unica parola filosoficamente vera. Tutte le altre sono nomi apparenti, che esprimono un mondo soltanto apparente. Il mondo della verità e il mondo della realtà sono il mondo di questo unico « *è* ».

Non è affatto vero che Parmenide sia il teorico dell'essere che è e del non essere che non è. Se avesse detto una cosa del genere non ce ne staremmo a occupare, perché sarebbe una banale tautologia. In realtà invece ha detto una cosa assai piú di fondo, e cioè che le ragioni della pensabilità e dell'esprimibilità sono le ragioni stesse della esistenza.

Per esempio per Parmenide l'essere non è eterno, perché se fosse eterno dovremmo dire che era e che sarà. Ma dire che *era* significa dire che *non è*, appunto perché si adopera l'imperfetto e non il presente. Dire che *sarà* significa dire che *non è* perché si adopera il futuro e non il presente. Quindi *è*, eterno presente. È sempre tutto. Questa è la formula di Parmenide.

Melisso poi, in una situazione storica profondamente mutata, raccoglie questo *è* parmenideo, già oggettivato e ontologizzato nella forma dell'ente e dell'unico ente che esso aveva ricevuto con Zenone, sostiene che il criterio di verità di questo unico essere è la sua eterna immutabilità. Se anche le cose particolari — dice Melisso — fossero eternamente immobili come l'unico ente sarebbero anch'esse vere. Quindi non piú le cose particolari sono apparenti perché contraddittorie, come per Parmenide, ma le cose particolari sono apparenti perché sono transeunti. Melisso fa il famoso esempio della fede al dito. La fede è durissima, il dito è tenero, tuttavia a contatto del dito la fede si consuma: nulla resta eternamente identico a se stesso. Quindi nulla di particolare è reale, è vero. Ma questa modifica, nell'impostazione melissiana è di grande importanza, perché è qui che nasce la contrapposizione tra mondo reale, eterno, vero, e mondo sensibile, come mondo del transeunte, e quindi la svalutazione di

tutto ciò che è sensibilità, di tutto ciò che è corporalità, e quindi di tutto ciò che è passionalità.

Ed è questo il criterio che eredita Platone. La dottrina delle idee non è altro che una molteplicità di esseri melissiani. Ma anche qui ritorna il motivo parmenideo, quando si deve stabilire di quali cose ci sono idee. C'è un primo aspetto che è immediatamente evidente: noi vediamo tanti uomini, questi uomini noi li chiamiamo uomini e li distinguiamo dai cani, perché hanno una certa forma, cioè partecipano di una certa figura, e possono partecipare di questa figura soltanto in quanto questa figura esiste. In sé e per sé è eternamente identica a se stessa mentre i singoli uomini sono transeunti.

Ma quando Platone si trova di fronte all'esigenza di affermare, come reali l'idea della giustizia, l'idea del bello, l'idea del bene, allora il motivo visivo (la forma o *eidos*) non vale piú. Non si può dire, per esempio, che si vedono le bellezze, si vedono individui belli. Ma qui interviene un altro motivo, cioè l'identità del nome. Se io adopero a proposito di una pentola, di una casa, di un animale, di un uomo o di una donna l'aggettivo bello, significa, questa identità di denominazione, che ci deve essere una identità di realtà di cui tutte queste cose partecipano.

Il linguaggio, la parola non può essere parola di nulla, deve essere parola di qualcosa, cioè di una realtà e quindi pronunciare questa parola significa anche scoprire questa realtà. E del resto Platone quando deve definire le idee adopera indifferentemente le formule: le idee sono *veracemente vere, veracemente esistenti, realmente vere e realmente reali*; la sfera della verità e la sfera della realtà sono sfere assolutamente intercambiabili nella dottrina delle idee di Platone. E tuttavia Platone a un certo momento del suo sviluppo filosofico, nei tardi dialoghi dialettici, si accorge che i conti con Parmenide li deve ancora fare, perché anche contro le sue « idee» può valere il motivo parmenideo per cui l'idea del bello è l'idea del bello e non l'idea del vero, non l'idea del giusto, e che quindi anche all'interno di questo mondo ideale, eternamente stabile ricompare la contraddizione di *essere* e *non essere*.

Di qui quella critica radicale di Parmenide (il famoso « parricidio »!) che è il capolavoro dialettico del *Sofista* e che approda a risultati di grande rilievo. Il primo è che nella opposizione di essere e non essere noi non formuliamo un'opposizione di sí o di no, ma una opposizione di identità e di diversità. L'identico e il diverso sono i due generi sommi, le due determinazioni generali che sempre noi ritroviamo. Dire che Achille *è* valoroso e *non è* vigliacco significa affermare l'identità di Achille (il suo valore) e la diversità (da ciò che noi definiamo come vigliacco). E quindi siamo sempre sul piano dell'essere. Affermiamo una volta l'identità e affermiamo un'altra volta la diversità. La contraddizione di Parmenide è confutata.

In secondo luogo, proprio per questa affermazione di identità e di alterità Platone nel *Sofista* scopre qualche cosa che ancora Wittgenstein vanta nel *Tractatus* come una sua grande scoperta, cioè la distinzione tra « essere copulativo » e « essere esistenziale ». Non è lo stesso concetto di essere quello che viene espresso quando io affermo che Socrate *è*, cioè esiste, e quando affermo che la Chimera *è* un mostro mitologico; nel secondo caso faccio una predicazione che non implica affatto la realtà del soggetto.

Allora dell'essere si parla almeno in due modi. Non piú in un modo solo come ne parlava Parmenide, ma almeno in due. E tutta la discussione e la dialettica del *Sofista* è basata sul fatto che questo linguaggio, questa dialettica dell'identico e del diverso, in tanto è componibile nel giudizio e quindi nella predicazione, in quanto riflette la struttura stessa della realtà. « Identico », e « diverso »: se noi li diciamo in greco, diciamo *tautón* e *héteron* e pensiamo al *Sofista*. Se li diciamo in tedesco, diciamo *etwas* e *anderen* e pensiamo di nuovo a Hegel. E la positività della dialettica hegeliana è proprio in questo tipo di recupero della positività dell'opposizione. Quando si pensa si pensa sempre qualche cosa che è, quando

si parla si parla sempre di qualche cosa che è, solo che di questo essere si parla in modi diversi.

Da questo complesso nodo, che io ho tracciato in modo molto sommario e nel quale bisognerebbe far entrare anche ciò che spetta ai mutamenti generali della società e della cultura greca, nasce la logica di Aristotele, la quale, quindi, non è separabile — ecco il punto cui vorrei arrivare — dalle implicazioni di carattere metafisico e scientifico di cui essa costituisce la teorizzazione. E non credo che sia separabile anche perché la dottrina della predicazione di Aristotele non sta in piedi e non si capisce, se non in quanto è la traduzione, sul piano del linguaggio e della logica, della teoria della sostanza e dell'accidente. E le relazioni tra soggetto e predicato e la possibilità di unire un predicato ad un soggetto per Aristotele sono le relazioni tra sostanza e accidente.

Ma questa logica della predicazione ha poi, accanto a sé, una logica dell'intuizione intellettuale. Come sul terreno della metafisica la dottrina della sostanza e dell'accidente ha di fronte a sé la dottrina del sinolo, cioè dell'unità di materia e forma, cosí qui sul terreno della logica c'è una dottrina dell'intuizione dell'unità del sinolo, che sta a fronte alla dottrina della predicazione.

Ma parlare di *dianoia* e di *nous* ci riporta ancora una volta a Kant e a Hegel. E allora la ricchezza di questa esposizione e il suo influsso storico è molto piú ampio, a mio avviso, non solo di quanto una determinata storia della logica possa rappresentare, ma anche di quanto finora solitamente si sia ritenuto in generale.

Allora che cosa concludere? Solo questo. In questione non è una determinata concezione della logica, né la sua importanza né la sua validità, ma la pretesa di estrapolare tale concezione, negandone il carattere determinato.

E, infatti, per la negazione di questo carattere determinato, quando si verifica, anche una logica determinata diventa una forma dell'ideologia, cioè un'immagine capovolta dei rapporti reali e dei rapporti materiali. E allora dovrebbero qui essere richiamate tutte le discussioni tra logica formale e logica dialettica. La critica alla formalità della logica e del linguaggio scientifico, e quindi alla latente ideologia antistoricistica che esso esprime e alla copertura che piú di una volta essa ha offerto, nel modo in cui concretamente si è prodotta, a una visione del mondo irrazionalistica, nella quale l'intuizione o il sentimento tenevano il posto della ragione. Non di una ragione che abbia come suo compito quello di mettere ordine, o forma, nel caos ineliminabile del mondo sensibile (che è poi l'eredità kantiana anche della logica formale) ma di una ragione storica o materialistica, nel senso della comprensione del rapporto reale tra teoria e processi reali e della critica del capovolgimento ideologico di questo rapporto: cioè di qualche cosa per la quale io credo possa ancora avere un senso parlare di filosofia.